



L'ÉLECTROMAGNÉTISME, 150-1

UNE SCIENCE EN PLEINE ACTION !

Conditions de transmission quasi-locales pour des méthodes de décomposition de domaine appliquées à un problème de diffraction.

M. Lecouvez⁽¹⁾, B. Stupfel⁽¹⁾, P. Joly⁽²⁾ et F. Collino⁽²⁾

(1) CEA-Cesta, Le Barp, France

(2) POEMS, ENSTA ParisTech/INRIA, Palaiseau, France

Mots-clefs : Diffraction, Décomposition de domaine, Conditions de transmission, Potentiels de Riesz

Résumé

Dans cet article, nous présentons des nouvelles conditions de transmission pour une méthode de décomposition de domaine, appliquées à un problème de diffraction. Contrairement aux conditions utilisées dans la littérature, les conditions développées ici sont non locales, mais s'écrivent sous la forme d'un opérateur intégral (de type potentiel de Riesz) sur l'interface entre deux domaines. Cet opérateur, d'ordre $\frac{1}{2}$, permet d'obtenir une convergence exponentielle de l'algorithme de décomposition de domaine. Une analyse spectrale de l'influence de l'opérateur est présentée sur un cas simple de type plan infini, puis quelques résultats numériques sont mis en avant.

Introduction

Les problèmes de diffraction par des objets électriquement larges interviennent dans de nombreux domaines. Le calcul numérique de ces problèmes reste limité par les ressources matérielles (mémoire et temps de calcul) à cause du nombre important d'inconnues, particulièrement quand des matériaux inhomogènes sont présents. Les méthodes de décomposition de domaine sont d'un grand intérêt dans un contexte d'éléments finis. Le problème est décomposé en plusieurs sous-problèmes couplés, qui peuvent être résolus indépendamment, réduisant la mémoire nécessaire et facilitant le calcul parallèle.

Comme ces sous-domaines font intervenir de nouvelles interfaces, il faut trouver des conditions à ces interfaces pour obtenir un problème bien posé dans chaque sous-domaine. De plus, les conditions aux nouvelles interfaces (ou conditions de transmission) influencent la vitesse de convergence de l'algorithme de décomposition de domaine.

De nombreuses études ont été réalisées sur ces méthodes de décomposition de domaine, et en particulier sur les conditions de transmission. On peut notamment citer les conditions de transmissions de Després [1] qui sont une combinaison linéaire particulière des conditions de Dirichlet et Neumann, ou encore les conditions faisant intervenir des ordres de dérivée plus élevés comme dans [2] ou [3]. Certaines conditions font également intervenir des opérateurs de type fractions rationnelles comme dans [4]. Cependant, ces conditions de transmission ne possèdent pas les propriétés permettant une preuve théorique de convergence géométrique des algorithmes itératifs de la décomposition de domaine.

1. Théorie générale de la décomposition de domaine

Nous étendons ici la théorie générale développée dans [5] au cas où l'opérateur de transmission possède une partie réelle et une partie imaginaire. Pour cela, nous reprenons strictement leurs conventions et notations :

Soit Ω un domaine fermé par une interface Γ . Le problème consiste à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = f, & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u + i\omega u = h, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ et $h \in L^2(\Gamma)$, alors il existe une unique solution u au problème, tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\partial_n u \in L^2(\Gamma)$. On introduit $(\Omega_k)_{k=1..K}$ une partition de Ω . On note $\Sigma_{kj} = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_j$.

Les restrictions des grandeurs aux domaines Ω_k (respectivement Σ_{kj}) seront notées avec l'indice k (respectivement kj). Dès lors, le problème initial (\mathcal{P}) est équivalent à l'ensemble des problèmes couplés :

$$(\mathcal{P}_k) \begin{cases} -\Delta u_k - \omega^2 u_k = f_k, & \text{dans } \Omega_k \\ \partial_{n_k} u_k + i\omega u_k = h_k, & \text{sur } \Sigma_{kk} \\ u_k = u_j, & \text{sur } \Sigma_{kj} \\ \partial_{n_k} u_k = -\partial_{n_j} u_j, & \text{sur } \Sigma_{kj} \end{cases} \quad (2)$$

Soit $T_{r,kj}$ et $T_{i,kj}$ deux opérateurs réels définis sur Σ_{kj} . On suppose que $T_{i,kj}$ s'écrit sous la forme $\Lambda_{kj}^* \Lambda_{kj}$ et qu'il est injectif, avec Λ_{kj} une isométrie de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{kj})$ dans $L^2(\Sigma_{kj})$. On pose $T_{r,kk} = 0$ et $T_{i,kk} = I$. On suppose également que $T_{r,jk} = -T_{r,kj}$ et que $T_{i,jk} = T_{i,kj}$. On note que $T_{kj} = T_{r,kj} + iT_{i,kj} = -\overline{T_{jk}}$. On définit alors les problèmes suivants :

$$(\mathcal{P}'_k) \begin{cases} -\Delta u_k - \omega^2 u_k = f_k, & \text{dans } \Omega_k \\ \partial_{n_k} u_k + i\omega u_k = h_k, & \text{sur } \Sigma_{kk} \\ \partial_{n_k} u_k + \omega T_{kj} u_k = -\partial_{n_j} u_j + \omega T_{kj} u_j, & \text{sur } \Sigma_{kj} \end{cases} \quad (3)$$

L'injectivité des $T_{i,kj}$ assure alors l'équivalence des problèmes (\mathcal{P}_k) et (\mathcal{P}'_k) . Tandis que l'ordre $\frac{1}{2}$ de l'opérateur Λ_{kj} assure la convergence exponentielle (voir [5]).

Dans la suite de l'article, nous prendrons $T_{r,kj} = T_{i,kj}$, de telle sorte que la condition de transmission s'écrive (z étant une constante complexe) :

$$\partial_{n_k} u_k + \omega z \Lambda_{kj}^* \Lambda_{kj} u_k = -\partial_{n_j} u_j - \omega \bar{z} \Lambda_{kj}^* \Lambda_{kj} u_j$$

2. Explicitation d'opérateurs de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ dans $L^2(\Omega)$

On recherche un opérateur Λ de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec d la dimension de Σ ($d = 2$ pour un problème 3D, $d = 1$ pour un problème 2D). Pour cela, nous utilisons la transformée de Fourier $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \hat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Le symbole de l'opérateur Λ doit vérifier

$$C_-(1 + |k|^2)^{\frac{1}{4}} \leq |\widehat{\Lambda}(k)| \leq C_+(1 + |k|^2)^{\frac{1}{4}}$$

Etudions l'opérateur Λ_0 de symbole $\widehat{\Lambda}_0(k) = |k|^{\frac{1}{2}}$. On décompose son symbole de la manière suivante :

$$\widehat{\Lambda}_0(k) = |k|^{\frac{1}{2}} = -ik \cdot \left(|k|^{-\frac{3}{2}} ik \right)$$

Ceci permet d'écrire formellement, si la transformée de Fourier inverse de $|k|^{-\frac{3}{2}}$ est un noyau intégrable \mathcal{K}_0 :

$$\Lambda_0 u(x) = -\operatorname{div} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_0(|x-y|) \nabla u(y) dy$$

ou encore sous la forme bilinéaire :

$$(\Lambda_0 u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_0(|x-y|) \nabla u(x) \nabla v(y) dx dy$$

Ce noyau appartient à la classe des potentiels de Riesz [6], qui correspondent aux puissances fractionnaires de l'opérateur $-\Delta$. En particulier :

$$\mathcal{K}_0(x) = \frac{C\left(d, \frac{3}{2}\right)}{|x|^{d-\frac{3}{2}}}$$

avec $C\left(1, \frac{3}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $C\left(2, \frac{3}{2}\right) = 2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ des constantes. Finalement, nous utiliserons un opérateur du type

$$(\Lambda u, v) = \alpha(u, v) + \beta \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_0(|x-y|) \nabla u(x) \nabla v(y) dx dy$$

L'inconvénient de ce type d'opérateur (ou plus généralement, de tout type d'opérateur vérifiant les propriétés voulues pour la convergence exponentielle) réside dans sa non localité. Après discrétisation, ils conduisent à des matrices pleines, nettement plus coûteuses à résoudre. Pour pallier à ce problème, on peut cependant introduire une troncature dans l'intégrale. On utilise pour cela une fonction de troncature $\chi_\delta(x)$ suffisamment régulière. Pour conserver le comportement en $s^{-\frac{3}{2}}$ à l'infini, il faut en effet soit de classe C^2 . On prend par exemple

$$\begin{cases} \chi_\delta(x) = \chi\left(\frac{x}{\delta}\right) \\ \chi(x) = 1 \quad \forall |x| \in [0,1] \\ \chi(x) = 0 \quad \forall |x| \geq 2 \\ \chi \text{ est un polynôme de degré 5 pour } |x| \in [1,2] \end{cases}$$

La forme bilinéaire devient donc :

$$(\Delta u, v) = \alpha(u, v) + \beta \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\delta(|x-y|) \mathcal{K}_0(|x-y|) \nabla u(x) \nabla v(y) dx dy$$

3. Etude analytique spectrale sur le plan infini

On considère le problème 2D (invariant par translation selon y) présenté Figure 1. Il s'agit d'un demi-espace vide ($z \geq 0$) et d'une couche de matériau d'épaisseur d ($-d \leq z \leq 0$) avec une permittivité et une perméabilité relative ϵ et μ . Une condition d'impédance est placée en $z = -d$. On envoie une onde incidente de la forme $u = e^{i(k_x x + k_0 z + \frac{2\pi f t}{c})}$, avec $k_x^2 + k_{0z}^2 = k_0^2$. $k_0 = \frac{2\pi f}{c}$ est le nombre d'onde dans le vide, et $k = k_0 \sqrt{\mu \epsilon}$ celui dans le matériau, c étant la vitesse de la lumière dans le vide. On a $k^2 = k_x^2 + k_z^2$. On note de plus $s = \frac{k_x}{k_0}$.

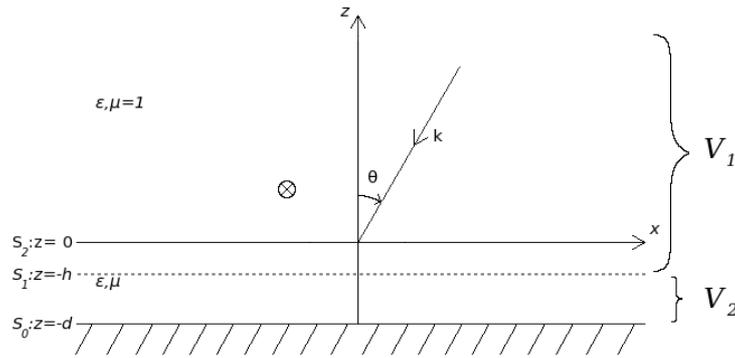


Figure 1: Géométrie du problème

Les équations de Maxwell donnent dans chaque polarisation :

$$\text{TE : } \begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_z^2 + k^2) E_y = 0 \\ H_x = \frac{1}{ik_0 \mu} \partial_z E_y \\ H_z = -\frac{1}{ik_0 \mu} \partial_x E_y \\ E_x = E_z = H_y = 0 \end{cases} \quad \text{TM : } \begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_z^2 + k^2) H_y = 0 \\ E_x = -\frac{1}{ik_0 \epsilon} \partial_z H_y \\ E_z = \frac{1}{ik_0 \epsilon} \partial_x H_y \\ H_x = H_z = E_y = 0 \end{cases}$$

3.1. Solution au problème exact

La solution s'écrit sous la forme générale $(A(s)e^{ik_z(s)z} + B(s)e^{-ik_z(s)z})e^{ik_0 s x}$ où $A(s)e^{ik_z(s)z}$ représente une onde entrante et $B(s)e^{-ik_z(s)z}$ une onde sortante. En particulier, dans le vide, $A = 1$ et $B = R_s$ est le coefficient de réflexion. Dans le matériau, $A(s)$ et $B(s)$ ne dépendent que de s et des paramètres physiques du problème. La continuité des champs tangents en $z = 0$ et la condition d'impédance en $z = -d$ nous donnent les trois équations pour résoudre le problème. On peut le formuler sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_s & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -\gamma_s \end{bmatrix}}_{\Sigma_s} \cdot \begin{bmatrix} B_s \\ A_s \\ R_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\gamma_s \end{bmatrix} \quad (4)$$

avec pour chaque polarisation :

$$\text{TE : } \begin{cases} \varphi_s = \frac{1 + Z \frac{k_z}{k_0 \mu}}{1 - Z \frac{k_z}{k_0 \mu}} e^{2ik_z d} \\ \gamma_s = \frac{k_{0z} \mu}{k_z} \end{cases} \quad \text{TM : } \begin{cases} \varphi_s = \frac{Z + \frac{k_z}{k_0 \varepsilon}}{Z - \frac{k_z}{k_0 \varepsilon}} e^{2ik_z d} \\ \gamma_s = \frac{k_{0z} \varepsilon}{k_z} \end{cases}$$

La première équation de (4) correspond à la condition d'impédance sur l'interface $z = -d$, tandis que les deux dernières équations sont la continuité des champs tangents. Notons de plus que l'on peut passer de la polarisation TE à la polarisation TM en changeant les paramètres (μ, ε, Z) en $(\varepsilon, \mu, \frac{1}{Z})$. De l'équation (4), nous pouvons calculer le déterminant de Σ_s ainsi que la solution R_s :

$$\det \Sigma_s = -[\varphi_s(\gamma_s + 1) - (\gamma_s - 1)] \quad (5)$$

$$R_s = \frac{1 + \varphi_s + \gamma_s(1 - \varphi_s)}{\det \Sigma_s}$$

L'équation (5) nous donne les zéros du déterminant du système, c'est-à-dire les valeurs de s pour lesquelles le système est mal posé. Ceci est dû au plan infini : nous ne sommes pas exactement dans le cadre théorique étudié précédemment.

3.2. Système aux interfaces

Dans la suite de l'article, on ne considère que la polarisation TM, le passage à la polarisation TE étant évident et on note $u = H_y$. On sépare le domaine global $z \geq -d$ en deux sous domaines par une interface située en $z = -h$. L'interface est donc dans le matériau. On considère un opérateur de transmission sous la forme générale $\mathcal{B}u = \frac{1}{\varepsilon} \partial_n u + k_0 T u$ où T peut être séparé en $T = T_r + iT_i$. On note $\alpha_s = \alpha_{r,s} + i\alpha_{i,s}$ son symbole dans une décomposition sur la base $e^{ik_0 s x}$. Les conditions de transmission s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u_1 + k_0 (T_r + iT_i) u_1 = \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u_2 + k_0 (T_r + iT_i) u_2 \\ -\frac{1}{\varepsilon} \partial_z u_2 - k_0 (T_r - iT_i) u_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \partial_z u_1 - k_0 (T_r - iT_i) u_1 \end{cases}$$

Après avoir introduit $u_j = (A_j(s) e^{ik_z(s)z} + B_j(s) e^{-ik_z(s)z}) e^{ik_0 s x}$ dans ces conditions, on obtient le système augmenté suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{1,s} & 1 & -\psi_{1,s} & -1 & 0 \\ \psi_{2,s} & 1 & -\psi_{2,s} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\gamma_s \end{bmatrix}}_{K_s} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} B_2 \\ A_2 \\ B_1 \\ A_1 \\ R_s \end{bmatrix}}_{v_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\gamma_s \end{bmatrix}}_{b_s}$$

avec

$$\psi_{1,s} = \frac{-i \frac{k_z}{\varepsilon} + k_0 \alpha_s}{i \frac{k_z}{\varepsilon} + k_0 \alpha_s} e^{2ik_z h}, \quad \psi_{2,s} = \frac{i \frac{k_z}{\varepsilon} + k_0 \bar{\alpha}_s}{-i \frac{k_z}{\varepsilon} + k_0 \bar{\alpha}_s} e^{2ik_z h}$$

Ce système est inversible dès que $\alpha_{i,s} \neq 0$. A partir de ce système, on peut mettre en place un procédé itératif de résolution de type Jacobi ou Gauss-Seidel en écrivant $K_s = M_s - N_s$. On obtient un procédé du type :

$$v_s^{n+1} = M_s^{-1} N_s v_s^n + M_s^{-1} b_s$$

La convergence de l'algorithme est alors directement reliée aux valeurs propres λ_s de la matrice $M_s^{-1} N_s$ puisque l'on a $\rho = \max_s |\lambda_s|$. De plus, les valeurs propres sont, pour Jacobi :

$$\lambda_s^J = 1 - r \pm r \sqrt{Q_s}$$

et pour Gauss-Seidel

$$\lambda_s^G = 1 - r + \frac{1}{2}r^2Q_s \pm \frac{r}{2}\sqrt{Q_s(r^2Q_s - 4r + 4)}$$

avec $Q_s = \frac{(\psi_{2,s} - \varphi_s)(\psi_{1,s} - \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_s + 1})}{(\psi_{1,s} - \varphi_s)(\psi_{2,s} - \frac{\gamma_s - 1}{\gamma_s + 1})}$ et r le coefficient de relaxation. On note que $\lambda_s = 1$ si $Q_s = 1$. On peut montrer que ce cas correspond à $\det \Sigma_s = 1$ (le problème initial est mal posé). On peut également montrer que si α_s ne se comporte pas comme $|s|$ à l'infini, alors $\lim_{s \rightarrow \infty} Q_s = 1$ et la convergence n'est pas exponentielle. Il est donc nécessaire d'avoir un opérateur dont le symbole se comporte comme s à l'infini.

3.3. Exemple de taux de convergence obtenus à partir des formules analytiques

Nous prenons l'exemple d'un problème presque résonant, c'est-à-dire qu'il existe un s pour lequel le déterminant de la matrice Σ_s est proche de zéro. Ici, $\mu = 5, \varepsilon = 3$. Nous avons représenté Figure 2 le taux de convergence $\rho_s = |\lambda_s|$ pour s allant de 0 à 20. Plusieurs types de conditions de transmission ont été testés.

- En noir : Condition de type Després : $\partial_n u + iz_i u, z_i \in \mathbb{R}$
- En bleu : Condition de type Després : $\partial_n u + zu, z \in \mathbb{C}$
- En rouge : Condition non locale imaginaire : $\partial_n u + iz_i T_i u$
- En vert : Condition non locale avec le même opérateur sur la partie réelle et imaginaire : $\partial_n u + zT u, z \in \mathbb{C}$
- En bleu clair : Condition générale : $\partial_n u + z_r T_r u + iz_i T_i u$

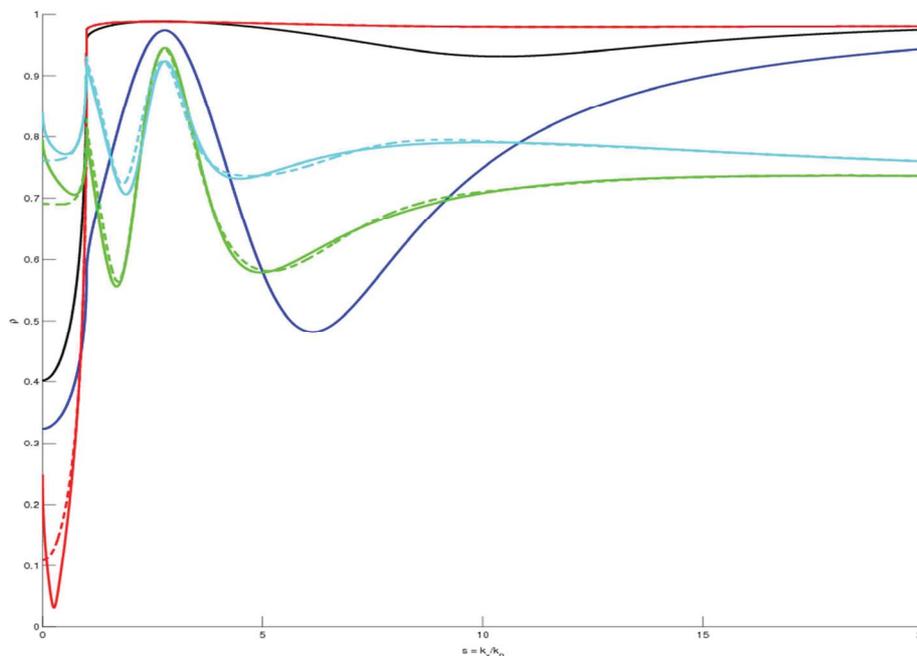


Figure 2 : Taux de convergence pour des modes s allant de 0 à 20. En noir, CT de type Després avec coefficient imaginaire. En bleu, CT de type Després avec coefficient complexe. En rouge, CT non locale, opérateur imaginaire pur. En vert, CT non locale, opérateur de type zT, z étant complexe. En bleu clair, CT non locale, opérateur de type $z_r T_r + iz_i T_i$. Les courbes en pointillées correspondent aux mêmes conditions de transmission avec troncature $\delta = 0.1$

Les valeurs des taux qui nous intéressent sont données dans le tableau suivant :

Type de CT	Després imaginaire	Després complexe	Opérateur Imaginaire	Opérateur zT	Opérateur général
Taux max sur $[0, 20]$	0.9883	0.9738	0.9878	0.9451	0.9238
Taux limite	1.0000	1.0000	0.9878	0.9451	0.9201
Taux max sur \mathbb{R}	1.0000	1.0000	0.9878	0.9451	0.9238

On voit clairement que l'opérateur particulier utilisé permet d'obtenir un taux de convergence maximal sur \mathbb{R} différent de 1 : la convergence est exponentielle pour tous les modes, y compris pour les grands modes.

3.4. Exemple numérique sur un maillage 2D.

Pour compléter l'étude de ces nouvelles conditions de transmission, nous les avons implémentées dans un code éléments finis 2D. La résolution de l'équation de Helmholtz est réalisée sur un cercle de rayon 1, recouvert d'une couche de matériau d'indice $\mu = \varepsilon = 2$ et d'épaisseur 0.05 dans un premier temps, puis 0.01. La fréquence vaut 2GHz. Le domaine est coupé en 2 couches concentriques et le domaine est fermé par une condition absorbante. La résolution est effectuée avec une condition de Després dans un premier temps, puis avec un opérateur de type zT . Nous avons représenté Figure 3 et Figure 4 l'évolution du résidu au fur et à mesure des itérations.

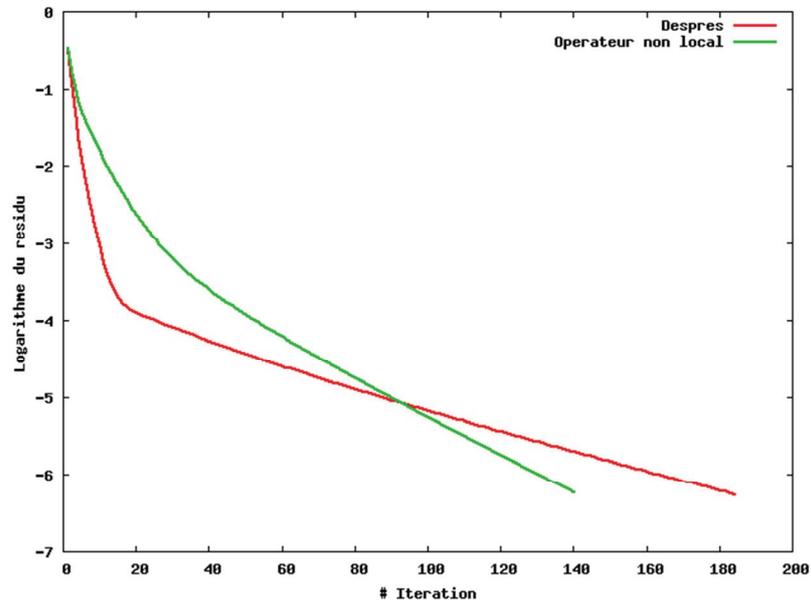


Figure 3 : Convergence d'une méthode Jacobi pour un matériau d'épaisseur 0.05

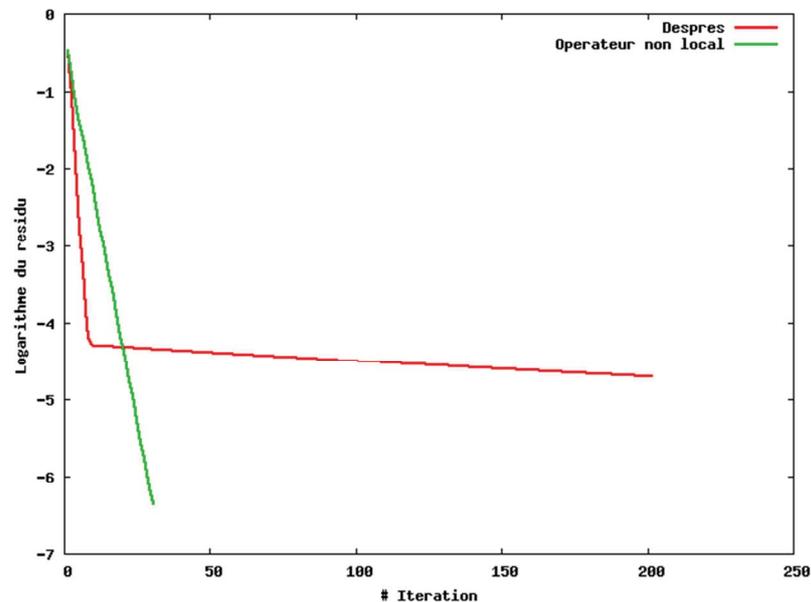


Figure 4 : Convergence d'une méthode Jacobi pour un matériau d'épaisseur 0.01

L'intérêt de l'opérateur de transmission est d'autant plus visible sur les problèmes avec une couche mince, ou de manière plus générale, lorsque le maillage est suffisamment raffiné. En effet, le raffinement du maillage permet de mieux représenter les modes élevés, et donc une condition locale aura plus de mal à converger sur ces modes. Ceci est particulièrement visible sur le second cas, où la convergence pour Després est très bonne au début puis stagne rapidement, tandis que l'opérateur traite très bien les grands modes : on ne retrouve pas ce palier.

Conclusion

Dans cet article, nous avons donc introduit des nouvelles conditions de transmission non locales. Ces conditions, de par leur construction, permettent une preuve générale de convergence exponentielle d'un algorithme itératif de type Jacobi ou Gauss-Seidel. Nous avons également introduit une méthode de troncature permettant de limiter le surcoût mémoire engendré par la non-localité des conditions de transmission. Une étude analytique sur un cas simple de plan infini permet de montrer l'intérêt de telles conditions, et notamment pour les grands modes, comportement que nous retrouvons lors d'expériences numériques sur le cercle.

Références bibliographiques

- [1] Després B., Domain decomposition method and the Helmholtz problem (part II), in Second international conference on mathematical and numerical aspect of wave propagation phenomena, SIAM 1993, p. 197-206
- [2] Gander M., Magoulès F., Nataf F., Optimized Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation, SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, Vol. 24:1, p. 38-60
- [3] Peng Z., Rawat V., Lee J.-F., One way domain decomposition method with second order transmission conditions for solving electromagnetic wave problems, Journal of Computational Physics, 2010, Vol. 229, p.1181-1197
- [4] Stupfel B., Poget D., Sufficient uniqueness conditions for the solution of the time harmonic Maxwell's equations associated with surface impedance boundary conditions, Journal of Computational Physics, 2011, Vol. 230, p. 4571-4587
- [5] Collino F., Ghanemi S., Joly P., Domain decomposition method for the harmonic wave propagation : a general presentation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 184, 24, 2000, p. 171-211
- [6] Stein E., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, 1970