CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES :
DE LA DOSIMÉTRIE À LA SANTÉ HUMAINE

Propagation de l'incertitude en dosimétrie numérique: comment réduire les coûts de calcul ?

M.A. Drissaoui*[*], F. Musy[§], L. Nicolas[*], R. Perrussel[¤], R. Scorretti[*] et D. Voyer[*]
[*]*Laboratoire Ampère (UMR CNRS 5005) /* [§]*Institut Camile Jordan (UMR CNRS 5208)*
CNRS-Université de Lyon-Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully, France
[¤]*LAPLACE (UMR CNRS 5213), CNRS-Université de Toulouse-ENSEEIHT, 31071 Toulouse, France*
Amine.Drissaoui@ec-lyon.fr

Mots-clefs : Dosimétrie, éléments finis, méthode de la base réduite.

Résumé
Nous présentons la méthode de la base réduite pour la coupler avec une approche non intrusive d'un problème stochastique en dosimétrie numérique. Les solutions du champ des problèmes déterministes sont calculées en utilisant un solveur itératif. En effet, nous exploitons les calculs déjà exécutés pour construire un itéré initial pour le solveur. On montre que cette technique réduit significativement le rapport coût calcul/précision.

Introduction
Nos travaux ont pour objet d'étudier l'effet de la variabilité et/ou de l'incertitude des caractéristiques électriques (conductivité et permittivité) des tissus biologiques dans les calculs de dosimétrie en téléphonie mobile. Pour cela, nous utilisons une méthode de collocation avec l'algorithme de Smolyak [1,2]. Cette méthode requiert de calculer le SAR avec un code de calcul déterministe pour un grand nombre de "points", correspondants chacun à un jeu de paramètres électriques différents : afin d'accélérer les temps de calcul nous construisons une base réduite à partir des solutions déjà calculées. On constate qu'après une dizaine de calculs déterministes, l'ébauche de solution construite sur la base réduite est très proche de la solution attendue. On a ainsi considérablement réduit les temps de calculs des simulations sans dégrader la précision des résultats.

1. La dosimétrie numérique statistique
La variabilité dans les caractéristiques électriques des tissus est modélisée en considérant ces paramètres comme des variables aléatoires. On choisit des lois uniformes centrées sur les valeurs référencées dans la littérature [3] avec une plage de variation de ± 10 %. Dans ces conditions, le SAR est également une variable aléatoire que l'on va évaluer en utilisant une méthode de collocation stochastique [1]. Dans cette approche, la variable aléatoire est décomposée sous la forme d'un chaos polynomial. Les coefficients du polynôme sont évalués par une méthode de projection : cela nécessite de calculer le SAR avec un code de calcul déterministe (approche non intrusif) pour des valeurs précis des paramètres d'entrée (= les conductivités et permittivités aléatoires) qui coïncident avec des points de quadrature. Le calcul du SAR est une opération très lente, d'autant plus que le nombre d'appel au code de calcul croit de façon exponentielle avec le nombre de variables d'entrée (exemple représentatif : pour 2 variables : 64 calculs, pour 5 variables : 32768) : pour diminuer le nombre d'appels au code de calcul, nous utilisons l'algorithme de Smolyak [2].

La valeur moyenne obtenue est de 4,82 W/kg : il s'agit à moins de 1% près de la valeur de référence (la valeur de référence est obtenue en prenant pour les caractéristiques électriques des tissus la valeur moyenne dans l'intervalle de variation). L'écart type est de 0,17 W/kg.

L'analyse de sensibilité est rapportée dans le Tableau I. On constate que les paramètres de la peau, et plus exactement sa conductivité, jouent un rôle prépondérant. La permittivité du crâne intervient aussi, mais très peu. Les autres tissus n'ont pas d'influence car l'onde émise par le portable est déjà grandement atténuée en les atteignant. Par ailleurs, l'effet total est quasiment égal à la variance partielle de chacun des paramètres : ce qui signifie qu'il y a très peu d'interactions entre ces paramètres.

quantité	variance partielle (%)	effet total (%)
ε_r cerveau	0.00	0.00
σ cerveau	0.00	0.00
ε_r liquide céphalo-rachidien	0.00	0.00
σ liquide céphalo-rachidien	0.00	0.00
ε_r crâne	1.57	1.64
σ crâne	0.02	0.02
ε_r peau	7.60	7.66
σ peau	90.70	90.74

Tableau I : étude de sensibilité de la résolution d'un problème de dosimétrie 3D.

A partir de la décomposition du SAR sous la forme d'un chaos polynomial, on peut calculer la fonction densité de probabilité du SAR en appliquant la méthode de Monte Carlo directement sur le chaos polynomial. En utilisant 50 000 échantillons et après un traitement numérique, la fonction densité de probabilité obtenue a l'allure rapportée Figure 1a : la valeur minimale est de 4.43 W/kg et la valeur maximale de 5.21 W/kg soit une plage de variation de ± 8% autour de la valeur moyenne. La disparité est donc moins grande que sur les paramètres des tissus.

(a) (b)

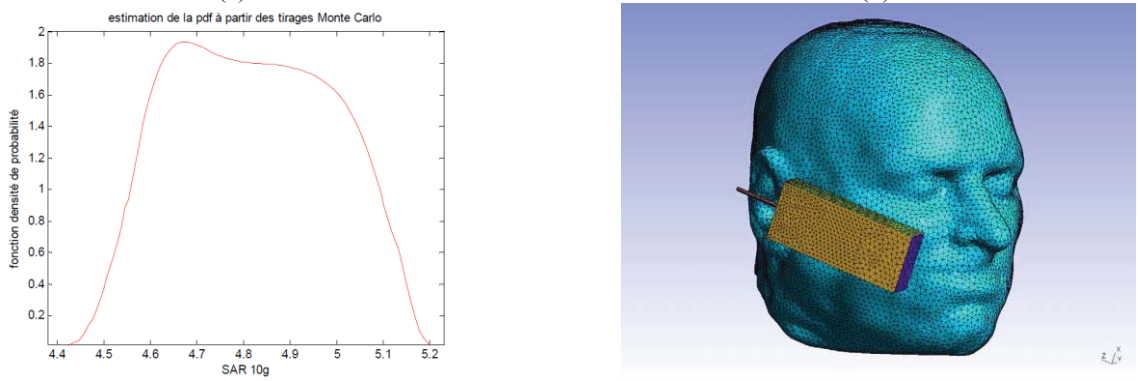

Figure 1 : a) fonction densité de probabilité du SAR 10g, b) modèle de « visible human »

Cette étude de variabilité des propriétés électromagnétiques des tissus démontre en principe la faisabilité de l'approche stochastique pour l'étude d'un problème de dosimétrie 3D. Le principal souci concerne les temps de calcul : une dizaine de jours de simulation pour résoudre notre problème - alors que le modèle utilisé (cf. Figure 1b) n'est pas des plus complexes ! Plusieurs centaines de simulations du problème déterministe sont nécessaires pour atteindre la convergence sur les grandeurs statistiques. Afin d'effectuer des études plus exhaustives, des techniques mathématiques ont été développées pour réduire les temps de calcul.

Dans la méthode de collocation stochastique, on effectue différents calculs déterministes *indépendants* en ne changeant que la valeur des propriétés électriques de quelques tissus : on n'exploite jamais le fait que les résultats obtenus dans les différents cas ne sont jamais véritablement éloignés les uns des autres, dans la mesure où le problème reste grossièrement le même (le modèle de tête, la fréquence, la géométrie et les propriétés électriques du portable reste les mêmes). Nous avons cherché une méthode qui exploite le fait que l'on répète des calculs sur des problèmes relativement voisins. Nos recherches nous ont conduits vers une méthode des bases réduites [4] : l'idée est de « recycler » les résultats des problèmes électromagnétiques déjà résolus pour fournir une ébauche de solution à la prochaine simulation à exécuter. Plus précisément, on construit une base à l'aide des solutions déjà calculées ; on projette ensuite notre problème électromagnétique sur cette base en lieu et place de la base éléments finis. Puis on résout le problème réduit, et finalement la solution obtenue est le point de départ du solveur itératif qui résout le problème éléments finis (pour plus de détails voir la section suivante).

Cette approche a été appliquée à notre problème avec succès. On constate qu'après une dizaine de calculs déterministes, l'ébauche de solution construite sur la base réduite est très proche de la solution attendue. On a ainsi considérablement réduit les temps de calculs des simulations sans dégrader la précision des résultats.

2. Méthode de la base réduite

Soit Ω notre domaine géométrique de calcul dans $\mathbb{R}^n$ (n = 1, 2 ou 3 en pratique) de frontière $\partial\Omega$, et sur lequel on cherche à résoudre l'équation des ondes pour le champ électrique $\vec{E}$ ayant pour paramètre d'entrée une fonction $\tilde{\varepsilon} : \Omega \to \mathbb{C}$ qui caractérise les paramètres électriques des tissus, et pour sortie le débit d'absorption spécifique (DAS). En écrivant la formulation éléments finis (avec les éléments d'arête d'ordre 1 incomplets) pour une fonction donnée $\tilde{\varepsilon}$, on obtient un problème de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } DAS(\tilde{\varepsilon}) = \dfrac{\sigma(\tilde{\varepsilon})|\vec{E}(\tilde{\varepsilon})|^2}{2\rho} \\ \text{où } \vec{E} \in X_h \text{ est solution de: } a(\vec{E}, \overrightarrow{W}; \tilde{\varepsilon}) = f(\overrightarrow{W}), \text{ avec:} \\ a(\vec{E}, \overrightarrow{W}; \tilde{\varepsilon}) = \int_\Omega [\vec{\nabla} \times \vec{E}].\overline{[\vec{\nabla} \times \overrightarrow{W}]}dv - \omega^2\mu_0 \int_\Omega \tilde{\varepsilon}\,\vec{E}.\,\overline{\overrightarrow{W}}\,dv + TB \\ f(\overrightarrow{W}) = -j\omega\mu_0 \int_\Omega \vec{J}_S.\,\overline{\overrightarrow{W}}\,dv \ \text{ pour tout } \overrightarrow{W} \in X_h \end{cases}, \tag{1}$$

où σ représente la conductivité, $|.|$ l'amplitude, ρ la masse volumique, X_h un espace éléments finis conforme dans l'espace $H(rot, \Omega)$, $\overrightarrow{W}$ une fonction test, μ_0 la perméabilité du vide, ω la pulsation, $\nabla\times$ l'opérateur rotationnel, j la racine carré de -1, TB le terme du bord et $\vec{J}_S$ le courant électrique source.

Cette discrétisation conduit à un système d'équations linéaires défini par une matrice $A(\tilde{\varepsilon})$ complexe symétrique de dimension (n,n) et un second-membre F de $\mathbb{C}^n$. On cherche alors le vecteur solution $E(\tilde{\varepsilon})$ de $\mathbb{C}^n$ tel que :

$$\boxed{A(\tilde{\varepsilon})\,E(\tilde{\varepsilon}) = F,} \tag{2}$$

où $A(\tilde{\varepsilon})_{i,j} = a(\overrightarrow{W_j}, \overrightarrow{W_i}; \tilde{\varepsilon})$ et $F_i = f(\overrightarrow{W_i})$ pour $i, j = 1$ à n, sachant que $\{\overrightarrow{W_i}; i = 1 \text{ à } n\}$ est la base éléments finis (base de X_h).

Pour résoudre ce système matriciel, nous avons opté pour un solveur itératif: Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient (COCG) qui est une version du bi-gradient conjugué adapté aux matrices complexes symétriques [5] ; ce dernier est préconditionné par une méthode basé sur la décomposition de Helmoltz [6]. On débute par le choix d'un vecteur initial E^0 qu'on considère nul dans un premier temps. Ensuite, le COCG procède par itérations au cours desquelles il détermine une succession de solutions approximatives qui se rapprochent graduellement de la solution cherchée, et il s'arrête dès que la précision demandée est atteinte.

Dans notre application le nombre n est très grand (plusieurs millions), ce qui rend la méthode des éléments finis coûteuse en temps de calcul dans le cas de requêtes multiples.

Dans le but d'accélérer les résolutions du système en réduisant le nombre d'itérations du COCG, on va introduire une méthode de « base réduite » [4], pour fournir un meilleur vecteur initial E^0.

2.1. Principe

En résolvant le problème (1) N fois pour différentes fonctions $(\tilde{\varepsilon}_i)_{1\le i\le N}$, on obtient les fonctions solutions de X_h qui engendrent l'espace de la base réduite que l'on note :

$$X_b = \text{Vect}\{\vec{\mu}_i = \vec{E}(\tilde{\varepsilon}_i); i = 1 \text{ à } N\},$$

Ensuite, On applique le procédé de Gram-Schmidt avec le produit scalaire canonique dans $\mathbb{C}^n$ sur la famille $\{\vec{\mu}_i; i = 1 \text{ à } N\}$ pour construire une base orthonormée $\{\vec{\xi}_i; i = 1 \text{ à } N\}$ de X_b.

Enfin, on projette le problème (1) sur le sous-espace d'approximation X_b. Par conséquent le problème sur la base réduite s'écrit :

$$\text{Trouver } \vec{E}_b(\tilde{\varepsilon}) \in X_b \text{ tel que } a(\vec{E}_b(\tilde{\varepsilon}), \overrightarrow{W}; \tilde{\varepsilon}) = f(\overrightarrow{W}) \ \ \forall \overrightarrow{W} \in X_b. \tag{3}$$

Ce problème admet également une solution unique car X_b est inclus dans X_h, et donc les hypothèses de Lax-Milgram sont également vérifiées dans X_b.

Notre problème est linéaire. Les composantes sur la base réduite de la fonction solution $\vec{E}_b(\tilde{\varepsilon}) \in X_b$ sont notées $E_b^i(\tilde{\varepsilon})$, $i = 1$ à N. On a donc :

$$\vec{E}_b(\tilde{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{N} E_b^i(\tilde{\varepsilon})\, \vec{\xi}_i \,. \tag{4}$$

On note alors $E_b(\tilde{\varepsilon})$ le vecteur de $\mathbb{C}^N$ défini par : $E_b(\tilde{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} E_b^1(\tilde{\varepsilon}) \\ \vdots \\ E_b^N(\tilde{\varepsilon}) \end{bmatrix}$. $E_b(\tilde{\varepsilon})$ est alors un vecteur solution du système linéaire :

$$\boxed{B(\tilde{\varepsilon})\, E_b(\tilde{\varepsilon}) = F_b,} \tag{5}$$

où $B(\tilde{\varepsilon})$ est la matrice (N,N) définie par $B(\tilde{\varepsilon})_{i,j} = a\left(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j; \tilde{\varepsilon}\right)$, $i, j = 1$ à N et F_b le vecteur de $\mathbb{C}^N$ défini par $(F_b)_i = f\left(\vec{\xi}_i\right)$, $i = 1$ à N. Sachant que $N \ll n$, on va résoudre ce système par éliminations de Gauss.

On note W la matrice (n, N) dont les colonnes j contiennent les composantes des fonctions $\vec{\xi}_j \in X_b$ dans la base éléments finis $\left\{\overrightarrow{W_i}; i = 1 \text{ à } N\right\}$, autrement dit $\vec{\xi}_j = \sum_{r=1}^{n} W_{r,j} \overrightarrow{W_r}$. Alors :

$$B(\tilde{\varepsilon})_{i,j} = a\left(\vec{\xi}_j, \vec{\xi}_i; \tilde{\varepsilon}\right) = \sum_{r,s=1}^{n} W_{r,j} W_{s,i}\, a\left(\overrightarrow{W_r}, \overrightarrow{W_s}; \tilde{\varepsilon}\right) = \sum_{r,s=1}^{n} W_{r,j} W_{s,i}\, A(\tilde{\varepsilon})_{r,s}\,, i, j = 1 \text{ à } N$$

$$(F_b)_i = f\left(\vec{\xi}_i\right) = \sum_{r=1}^{n} W_{r,i} f\left(\overrightarrow{W_r}\right),\ i = 1 \text{ à } N$$

On a donc les relations :

$$\boxed{B(\tilde{\varepsilon}) = \overline{W^t} A(\tilde{\varepsilon}) W \text{ et } F_b(\tilde{\varepsilon}) = \overline{W^t} F.}$$

où $\overline{W^t}$ est la transposée conjuguée de W.

D'autre part :

$$\vec{E}_b = \sum_{i=1}^{N} E_b^i\, \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{N} E_b^i \left(\sum_{r=1}^{n} W_{r,i} \overrightarrow{W_r}\right) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} W_{r,i} E_b^i\right) \overrightarrow{W_r} = \sum_{i=1}^{N} (WE_b)_r\, \overrightarrow{W_r}.$$

Les composantes de la fonction $\vec{E}_b(\tilde{\varepsilon}) \in X_b$ dans la base éléments finis forment un vecteur de $\mathbb{C}^n$ qui est donc obtenu à partir du vecteur $E_b(\tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{C}^N$ par le produit matrice vecteur $WE_b(\tilde{\varepsilon})$. On initialisera dorénavant le COCG par $E^0 = WE_b(\tilde{\varepsilon})$.

2.2. Remarque

Supposons que l'on a $\Omega = \cup_{k=1}^{p} \Omega_k$, où les $(\Omega_k)_{1 \le k \le p}$ forment une partition finie et sans recouvrement de Ω. Chaque sous-domaine Ω_k est caractérisé par un paramètre électrique constant $\tilde{\varepsilon}^k = \varepsilon_0 \varepsilon_r^k + \sigma^k / j\omega$ qui correspond à la ième composante du vecteur $\tilde{\varepsilon}$, avec ε_r^k la permitivité relative et σ^k la conductivité du sous-domaine k. Par conséquent $\tilde{\varepsilon}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} : \Omega &\to \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \tilde{\varepsilon}(x) = \tilde{\varepsilon}^k \text{ si } x \in \Omega_k, k = 1 \text{ à } p \end{aligned}$$

Afin de ne pas de recalculer les systèmes (2) et (5) pour chaque $\tilde{\varepsilon}$, on va décomposer a ainsi :

$$a\left(\vec{E}, \overrightarrow{W}; \tilde{\varepsilon}\right) = a_0\left(\vec{E}, \overrightarrow{W}\right) - \omega^2 \mu_0 \sum_{k=1}^{p} \tilde{\varepsilon}^k a_k\left(\vec{E}, \overrightarrow{W}\right) \qquad \forall\, \vec{E}, \overrightarrow{W} \in X_h,$$

avec $a_0\left(\vec{E}, \overrightarrow{W}\right) = \int_\Omega \vec{\nabla} \times \vec{E} \,.\, \vec{\nabla} \times \overrightarrow{W} + TB$ et $a_k\left(\vec{E}, \overrightarrow{W}\right) = \int_{\Omega_k} \vec{E} \,.\, \overrightarrow{W}, k = 1$ à p.

On note pour k=0 à p, A_k les matrices (n,n) définies par $(A_k)_{i,j} = a_k\left(\overrightarrow{W_j}, \overrightarrow{W_i}; \tilde{\varepsilon}\right)$, $i, j = 1$ à n. Il vient alors :

$$A(\tilde{\varepsilon}) = A_0 - \omega^2 \mu_0 \sum_{k=1}^{p} \tilde{\varepsilon}^k A_k. \quad (6)$$

Les matrices A_k ne dépendent pas de $\tilde{\varepsilon}$, alors elles ne nécessitent pas de nouveaux calculs lorsqu'on change de fonction $\tilde{\varepsilon}$. En prenant par ailleurs en compte leur aspect creux, le calcul de $A(\tilde{\varepsilon})$ peut se faire à faible coût.

En outre, on introduit les matrices (N,N) définies par $B_k = W^t A_k W, k = 0$ à p. On a alors :

$$B(\tilde{\varepsilon}) = W^t A(\tilde{\varepsilon}) W = W^t A_0 W - \omega^2 \mu_0 \sum_{k=1}^{p} \tilde{\varepsilon}^k W^t A_k W$$

Soit :

$$\boxed{B(\tilde{\varepsilon}) = B_0 - \omega^2 \mu_0 \sum_{k=1}^{p} \tilde{\varepsilon}^k B_k.}$$

On a intérêt pour des raisons de coût à calculer la matrice $B(\tilde{\varepsilon})$ à partir des matrices $B_k = W^t A_k W, k = 0$ à p ; en effet, l'ajout d'un élément dans la base réduite ne demande que le calcul d'une nouvelle ligne et d'une nouvelle colonne dans chaque matrice $B_k, k = 0$ à p .

Références bibliographiques

[1] D. Xiu, "Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review," *Communications In Computational Physics*, vol.5, no.2, pp. 242–272, 2009.

[2] D. Voyer, L. Nicolas, R. Perrussel, and F. Musy, "Comparison of methods for modeling uncertainties in a 2d hyperthermia problem," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 11, pp. 189-204, 2009.

[3] C. Gabriel, S. Gabriel, and E. Corthout, "The dielectric properties of biological tissues: I. literature survey," *Phys. Med. Biol*., vol. 41, pp. 2231-2249, 1996.

[4] G. Rozza, D.B.P. Huynh, and A.T. Patera, "Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations," *Arch. Comput. Methods Eng*., vol. *15,* no. *3,* pp. 229-275, 2008.

[5] Van der Vorst, H. A. and J. B. M. Melissen, "A Petrov-Galerkin type method for solving Ax = b, where A is symmetric complex," *IEEE Trans. Mag.*, vol.26, no.2, pp. 706–708, 1990.

[6] R. Perrussel, L. Nicolas and F. Musy, "An Efficient Preconditioner for Linear Systems Issued From the Finite-Element Method for Scattering Problems," *IEEE Trans. Mag*., vol.40, no.2, pp. 1080–1083, 2004.