

MÉTHODE HYBRIDE DGTD/FDTD POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL EN DOMAINE TEMPOREL

Y. Ventribout, P. Breuilh

EADS-NUCLETUDES

91944 Courtaboeuf cedex

E-mail: yventribout@nucletudes.com

Résumé Une méthode pour résoudre les équations de Maxwell en domaine temporel est proposée. Elle allie la précision et la souplesse géométrique d'une méthode Galerkin Discontinue (DGTD) appliquée à un sous-domaine du volume de calcul s'appuyant sur un maillage structuré ou non, avec la simplicité de mise en œuvre de la méthode Différences Finies (FDTD) appliquée au reste du volume de calcul s'appuyant sur un maillage structuré. Les méthodes DGTD sont une généralisation des méthodes Volumes Finis (FVTD), plus précises mais qui nécessitent également une résolution plus complexe et plus coûteuse. Une hybridation Volumes finis (FVTD)/FDTD stable reposant sur des interpolations par moyennes pondérées entre les inconnues des deux méthodes, a déjà été proposée par [3]. Nous souhaitons alors étudier la précision et la stabilité d'une hybridation DGTD/FDTD, étant entendu que celle-ci fera nécessairement intervenir plus d'interpolations entre les inconnues mises en jeu que la méthode FVTD/FDTD.

I. INTRODUCTION

La méthode la plus utilisée encore actuellement pour résoudre les équations de Maxwell en régime transitoire est la méthode des différences finies. Ce schéma, construit sur une grille cartésienne orthogonale et utilisant une approximation leapfrog en temps et en espace, est d'ordre 2. Sa facilité de mise en œuvre ainsi que l'obtention de schémas explicites en temps peu coûteux l'ont rendu très populaire. Cependant, il souffre d'un certain nombre de problèmes comme l'approximation en marches d'escalier de la surface d'objets générant des ondes parasites ou l'augmentation importante de l'erreur de dispersion lors de l'utilisation de pas de maillage variable (grande dispersion sur les mailles les plus grossières). La méthode DGTD est une alternative performante à la méthode FDTD qui repose sur une base de fonctions discontinues d'un élément du maillage à un autre. L'ordre d'interpolation peut être choisi arbitrairement dans chaque élément, et cette méthode peut être vue comme une approche élément fini pour laquelle aucune continuité n'est imposée entre éléments, ou comme une approche volume fini d'ordre élevé. La popularité des méthodes DGTD (récente en électromagnétisme) provient principalement de leur grande adaptabilité ainsi que de leur souplesse d'emploi. Citons quelques avantages théoriques :

- les ordres d'approximation peuvent être choisis localement en fonction de la précision désirée.
- on peut traiter facilement des géométries (objets courbes, ...) ou des conditions aux limites complexes.
- le raffinement en espace est naturel, aussi bien en maillage conforme comme l'illustrent les résultats

de la figure 4, que non-conforme [1].

Notre but est de développer une méthode hybride, combinant les avantages des méthodes FDTD avec ceux des méthodes DGTD. Elle peut être vue comme une généralisation de l'hybridation Volumes Finis/Différences Finies introduite dans [3], où l'erreur de dispersion est trop importante, par une hybridation DGTD/FDTD plus précise. Le but est double :

1. résoudre les équations de Maxwell à la fois sur des maillages destructurés permettant de considérer des géométries courbes et sur des maillages structurés,
2. effectuer des raffinements spatio-temporels sur les volumes de calcul de la méthode DGTD (en maillage structurés ou destructurés), sans craindre l'apparition d'ondes parasites caractéristiques des méthodes de raffinement en FDTD.

La principale difficulté réside dans le fait que l'hybridation FDTD/DGTD nécessite de fournir plus d'informations au schéma DGTD provenant du schéma FDTD que dans le cas d'une hybridation FVTD/FDTD.

Pour la simplicité des notations, la méthodologie d'hybridation sera décrite en 2D, mais la généralisation au 3D ne pose aucune difficulté.

II. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DGTD

Considérons le système de Maxwell 2D dans la polarisation transverse électrique TE_z :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E_x - \partial_y H_z & = 0 \\ \varepsilon \partial_t E_y + \partial_x H_z & = 0 \\ \mu \partial_t H_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x & = 0. \end{cases} \quad (1)$$

En posant :

$$U = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{pmatrix},$$

le système (1) peut se mettre sous la forme d'un système de Friedrichs, soit un système hyperbolique :

$$A^0 \partial_t U + A^i \partial_i U = 0, \quad (2)$$

où les matrices $A^0, (A^i, i = 1, 2)$ sont symétriques.

$$A^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La convention d'Einstein sur les indices répétés a été utilisée.

II.1. Formulation Variationnelle

Considérons un partitionnement du domaine en N cellules :

$$\Omega = \bigcup_{K=1,N} K, K \neq L \Leftrightarrow K \cap L = \emptyset.$$

Le long de ∂K , on désigne par n_K le vecteur unitaire normal à ∂K , et sortant par rapport à K . Le principe de la méthode DGTD est alors de découpler les cellules entre elles en introduisant des termes de flux. En notant $V_K = V|_K$ pour toute fonction $V \in L^2(\Omega)$, et en supposant que la solution $U(\cdot, t)$ de (1) appartient à $L^2(\Omega) \cap \prod H^1(K)$, alors on cherche pour toute fonction $V_K \in H^1(K)$, un flux $\mathbb{F}(U_K, U_L)$ tel que (en notant $A(n_K) = n_{K,j} A^j$) :

$$\int_{\partial K} (A(n_K) U_K, V_K) = \sum_L \int_{\partial K L} (\mathbb{F}(U_K, U_L), V_K)$$

A l'instar des travaux de [2], on choisit une méthode DGTD avec flux centrés. Il vient par intégration par parties depuis (2), une formulation centrée non dissipative :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_K (A^0 U_K, V_K) + \frac{1}{2} \sum_L \int_{\partial K L - \partial \Omega} (A(n_K) U_L, V_K) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_K (A^i \partial_i U_K, V_K) - (A^i U_K, \partial_i V_K) \\ & + \frac{1}{2} \sum_L \int_{\partial K L \cap \partial \Omega} (N U_K - g, V_K) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

où g désigne un second membre éventuel à la condition aux limites, et $N = 2M + A^i n_i$ avec M qui est une matrice dont le noyau représente la condition aux limites. Ce problème complet est mathématiquement bien posé sous conditions algébriques et géométriques [4].

Remarque II.1 D'autre choix de termes de flux sont possibles. Pour des flux décentrés plus dissipatifs et moins dispersifs, le lecteur pourra consulter [6], alors que [5] propose une formulation mixte englobant les deux choix possibles.

II.2. Discrétisation spatio-temporelle

II.2.1. Schéma semi-discret en espace

Dans un premier temps, nous nous sommes bornés à une approximation polynomiale spatiale de degré 1 des inconnues du système (3). A l'instar des méthodes de discrétisation de type Galerkin "continue", le schéma semi-discrétisé spatial s'obtient par assemblage matriciel des contributions des termes de (3) sur chaque élément K du maillage. La solution du système (1) $U(\cdot, t) \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega) \cap \prod H^1(K))$ et satisfait localement sur chaque K l'équation algébrique :

$$M_K \frac{dU_K}{dt} + A_K U_K = 0, \quad (4)$$

avec M_K matrice de masse symétrique, définie positive, et A_K matrice creuse et antisymétrique.

Les tailles de ces matrices locales mises en jeu dépendent de l'ordre d'approximation spatial utilisé et plus précisément sont des matrices carrées fonction du nombre de degrés de liberté associés et du nombre de champs mis en

jeu (par exemple 3 pour la polarisation TE_z). Les fonctions de base par champ utilisées sont identiques à celles utilisées en méthode éléments finis "classiques" ([9] pour la description des espaces d'approximation polynomiaux Q^1 et P^1). La différence avec les méthodes Galerkin continue est que les inconnues numériques de la méthode (les degrés de liberté) sont aussi des approximations des coordonnées suivant les fonctions de base locales des champs électrique et magnétique, mais dans chaque cellule du maillage. Sur la figure 1, la discontinuité entre les degrés de liberté d'un élément et de ses voisins est représentée pour des triangles ou des rectangles.

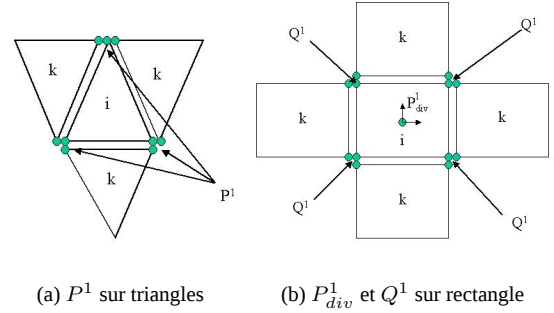


Fig. 1. Degrés de liberté pour la méthode DGTD à l'ordre 1 pour un élément i et ses voisins k

Ainsi, les valeurs numériques des champs aux interfaces frontières entre deux éléments, résultent de moyennes centrées entre les différents degrés de liberté mis en jeu par un élément et ses éléments voisins. Ces deux espaces Q^1 et P^1 assurent la conservation de la divergence, respectivement sur un maillage cartésien et un maillage triangulaire. Dans le cas d'un maillage cartésien, les travaux de [2] montrent que si l'on considère des composantes (indiquées 1, 2, ...) des champs E et H ne variant pas respectivement dans leurs directions (E_x dans la direction x , ...), la divergence est "conservée" en un sens faible. Cette hypothèse restrictive revient à considérer moins de degrés de liberté par composante de champ (l'espace est dénommé P^1_{div}), soit :

$$\begin{cases} E_x = E_{x,1} + (y - y_c) E_{x,3} \\ E_y = E_{y,1} + (x - x_c) E_{y,2} \\ H_z = H_{z,1} + (x - x_c) H_{z,2} + (y - y_c) H_{z,3}, \end{cases} \quad (5)$$

avec (x_c, y_c) désignant le centre de gravité de la cellule. En fait, par identification avec un développement de Taylor, les degrés de liberté correspondent à la valeur du champ considéré au centre de la cellule (comme en volumes finis), et à certaines valeurs des gradients de ces champs au centre de gravité (gradients représentés par des flèches directionnelles sur la figure 1). De plus, les matrices de masse locales sont diagonales, ce qui permet un gain significatif en temps de calcul.

II.2.2. Discrétisation temporelle

La forme du système différentiel (4) permet d'envisager plusieurs discrétisations temporelles explicites (aboutissant à des schémas moins coûteux en temps de calcul que des

schémas implicites). Le schéma saute-mouton qui n'introduit pas de dissipation est le plus couramment utilisé de par son adéquation avec un système "croisé" comme celui de Maxwell. Sa condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) est établie pour les méthodes DGTD dans [1]. D'autres schémas explicites, avec une complexité équivalente mais une CFL moins restrictive, peuvent être envisagés, comme une explicitation type Runge-Kutta ou un schéma basé sur des développements en polynômes de Chebycheff comme le schéma de Talezer [7]. Notre motivation principale étant la faisabilité d'une hybridation FDTD/DGTD, il nous a semblé judicieux de s'abstenir d'interpolations temporelles entre ces deux schémas, et donc d'utiliser une approximation centrée commune de type leapfrog. Le schéma complet (6) qui en résulte ne nécessite que l'inversion de matrices locales :

$$\begin{cases} \mu_i M_i \left(\frac{H_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - H_{zi}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) = M_i^x E_{yi}^n - M_i^y E_{xi}^n - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} (S_{ik}^x E_{yk}^n - S_{ik}^y E_{xk}^n) \\ \epsilon_i M_i \left(\frac{E_{xi}^{n+1} - E_{xi}^n}{\Delta t} \right) = -M_i^y H_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik}^y H_{zk}^{n+\frac{1}{2}} \\ \epsilon_i M_i \left(\frac{E_{yi}^{n+1} - E_{yi}^n}{\Delta t} \right) = M_i^x H_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik}^x H_{zk}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (6)$$

où $\mathcal{V}_i$ désigne l'ensemble des voisins de l'élément T_i , et où les matrices mises en jeu sont données par :

$$\begin{cases} (M_i)_{jl} = \int_{T_i} \phi_{ij} \phi_{il} \\ (S_{ik}^x)_{jl} = \frac{1}{2} n_{ikx} \int_{a_{ik}} \phi_{ij} \phi_{il} \quad \text{pour } x = \{x, y\} \\ (M_i^x)_{jl} = \frac{1}{2} \int_{T_i} \partial_x \phi_{ij} \phi_{il} - \phi_{ij} \partial_x \phi_{il} \\ (M_i^y)_{jl} = \frac{1}{2} \int_{T_i} \partial_y \phi_{ij} \phi_{il} - \phi_{ij} \partial_y \phi_{il}, \end{cases}$$

avec ϕ_{ij} désignant la $j^{\text{ième}}$ fonction de base de l'élément i , a_{ik} la frontière commune entre l'élément i et un voisin k , et (n_{ikx}, n_{iky}) les composantes du vecteur unitaire normal sortant de T_i vers T_k .

III. VALIDATION NUMÉRIQUE DE LA MÉTHODE DGTD

Dans un premier temps, on se propose d'illustrer la précision numérique de la méthode DGTD par rapport à la méthode FVTD et la méthode FDTD. Pour des comparaisons aisées avec une solution explicite, on se propose de solliciter le mode $TE_z(1, 1)$ dans un carré unitaire métallique. Les permittivités électriques ϵ_i , les perméabilités magnétiques μ_i et les vitesses de propagation c_i sont toutes supposées égales à 1. Les équations de Maxwell (1) sont par conséquent adimensionnées, et les unités physiques sont donc arbitraires (par exemple, le temps peut être exprimé en mètre). Sur la figure 2, on présente les résultats obtenus avec les méthodes FDTD et DGTD, pour le champ H_z en un point du maillage et pour un maillage en pavés carrés de longueur $\lambda/7$.

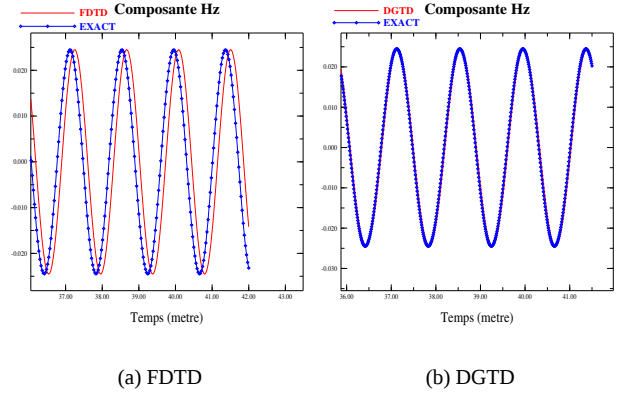


Fig. 2. Comparaison FDTD et DGTD en $\lambda/7$

La méthode DGTD présentée ici est une méthode d'approximation P_{div}^1 . Les zooms sur les dernières périodes montrent bien la plus grande précision des résultats DGTD par rapport à ceux obtenus en FDTD. En maillage cartésien, il est bien connu qu'un maillage deux fois plus fin est nécessaire lorsqu'on applique une méthode FVTD (qui est on le rappelle une méthode DGTD à l'ordre 0) pour obtenir des résultats similaires à une méthode FDTD en terme d'erreur de dispersion. Par exemple, un maillage en $\lambda/14$ est nécessaire pour une méthode FVTD afin d'obtenir une précision similaire à des résultats FDTD en $\lambda/7$.

En terme de temps de calcul, la méthode DGTD est plus coûteuse de l'ordre de 6 fois que les méthodes FDTD ou FVTD, de par le nombre de produits matriciels mis en jeu pour sa résolution, et de par sa CFL trois fois plus restrictive. Le compromis entre le temps de calcul et la précision du résultat ne nous semble pas pleinement justifier une résolution DGTD à l'ordre 1 sur des maillages cartésiens.

En revanche, cette méthode permet de résoudre efficacement le système (1) sur un maillage destructuré (voir figure 3) qui a été raffiné de manière conforme (mailles en $\lambda/14$ sur la frontière du carré métallique jusqu'à $\lambda/28$ sur une zone d' $1/2$ de longueur d'onde au centre de ce même carré). Dans cette configuration et contrairement à des maillages cartésiens, l'erreur de dispersion des méthodes FVTD n'est pas améliorée par la précision croissante du maillage. Ceci est illustré sur la figure 4 qui présente aussi les résultats obtenus par une méthode DGTD P^1 , pour le champ H_z localisé au barycentre d'un triangle du maillage.

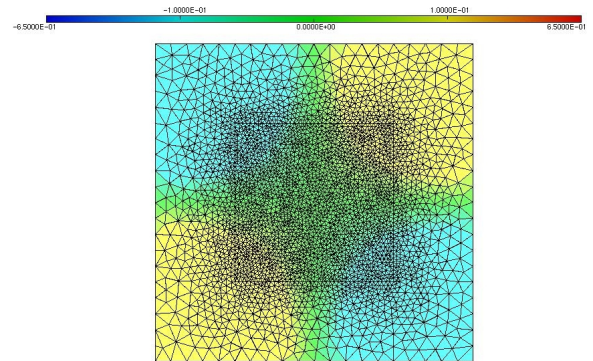


Fig. 3. Maillage destructuré raffiné-conforme

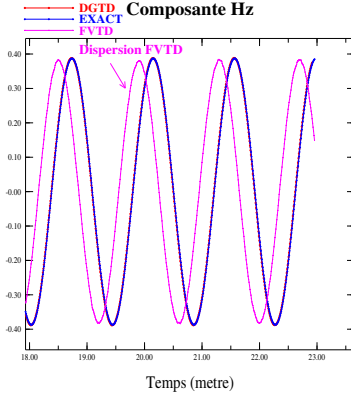


Fig. 4. DGTD et FDTD sur maillage destructuré

IV. HYBRIDATION DGTD/FDTD

Etant entendu que la méthode DGTD est plus précise mais plus coûteuse que la méthode FDTD (y compris sur des maillages cartésiens), l'intérêt de notre hybridation est d'utiliser la résolution DGTD sur une "petite" partie de la zone de calcul. Cette zone déterminée par avance pourra être une partie d'un objet ou bien une zone cartésienne du maillage entourant un objet, dans laquelle on souhaite obtenir numériquement une plus grande précision des champs électromagnétiques. En vertu de l'application d'une méthode DGTD, cette zone peut tout à fait être maillée de façon destructurée. Cependant, on se propose dans un premier temps pour des facilités de mise en oeuvre, d'étudier cette méthode entre deux zones de résolution cartésienne.

IV.1. Présentation de l'algorithme

On se propose donc de simuler des modes $TE_z(1,1)$ dans un carré métallique représenté sur la figure 5, où la zone DGTD peut être une zone sous-maillée non-conforme cartésienne ou bien une zone non raffinée de mailles identiques à la zone FDTD.

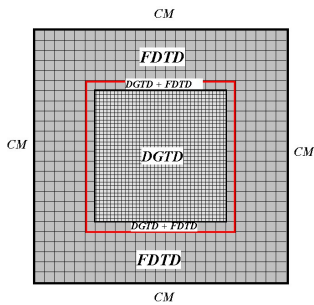


Fig. 5. Partition d'un carré métallique CM

Cette première configuration va permettre d'étudier dans le cas le plus simple l'algorithme d'hybridation proposé :

1. Une zone "tampon" FDTD+DGTD monocellulaire est établie autour de la zone DGTD prédéterminée.
2. Les champs H_z FDTD sont actualisés en utilisant comme valeurs des champs E_x et E_y sur les frontières de la zone tampon des interpolations issues de calcul DGTD (voir figure 6).

3. Les degrés de liberté des champs H_z DGTD dans la zone tampon et dans une zone monocellulaire autour de la zone tampon sont interpolés à partir des valeurs des champs H_z FDTD (voir figure 6).
4. Les champs E_x et E_y sont actualisés en FDTD.
5. Les degrés de liberté des champs E_x et E_y sont actualisés en DGTD.

Aucune interpolation temporelle n'est nécessaire en vertu de l'utilisation de schémas leapfrog pour les deux résolutions.

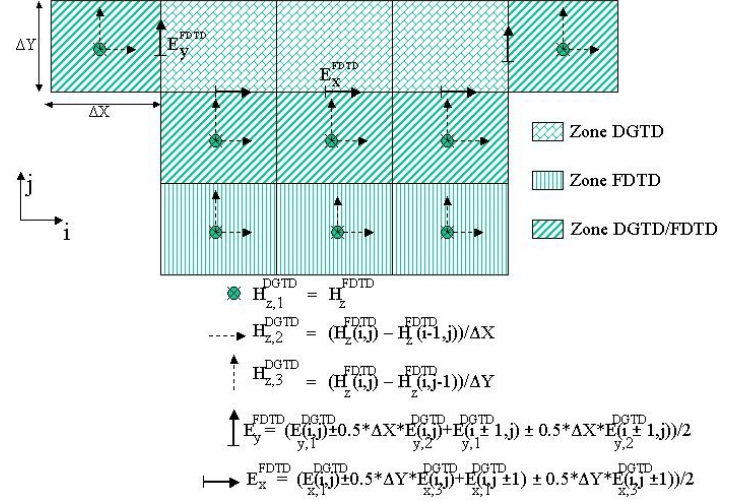


Fig. 6. Algorithme d'hybridation pour une méthode DGTD/FDTD par interpolations de type P_{div}^1

Remarque IV.1 Dans le cas d'une hybridation avec une méthode DGTD d'ordre Q^1 , l'algorithme d'interpolation n'est pas représenté, mais il sera numériquement comparé dans la partie IV.2 à l'hybridation de la figure 6. Dans ce cas, toutes les composantes des champs H_z nécessaires pour la résolution DGTD sont obtenues par moyenne à partir des valeurs H_z FDTD de l'ensemble des cellules voisines d'une cellule donnée.

D'autres choix d'interpolations que ceux présentés sont possibles entre les degrés de liberté des méthodes FDTD et DGTD. Nous avons expérimenté plusieurs d'entre eux, sans obtenir de différences qualitatives avec les résultats que nous allons exposer par la suite. Dans le cadre d'une hybridation FDTD/FDTD [3], le nombre de degrés de liberté entre les deux méthodes numériques est identique par champ électromagnétique donné (1 degré de liberté), et seules leurs localisations par cellule du maillage sont distinctes. Les résultats de [3] montrent que de simples moyennes entre les inconnues des deux méthodes suffisent à stabiliser cette méthode d'hybridation, que nous avons choisi comme référence de comparaison pour notre méthode hybride. La différence fondamentale est ici que le nombre de degrés de liberté de la méthode DGTD est supérieur à celui de la méthode FDTD, et oblige par conséquent à donner un "sens" via des interpolations avec les inconnues FDTD aux degrés de liberté supplémentaires de la méthode DGTD. En résumé, et quelles que soient leurs natures, des interpolations supplémentaires sont nécessaires pour l'hybridation DGTD/FDTD par rapport à l'hybridation FDTD/FDTD.

IV.2. Résultats numériques

Nous exposons dans cette partie quelques résultats d'hybridation DGTD/FDTD obtenus pour des approximations P_{div}^1 et Q^1 . On se place toujours dans le cadre d'excitation de modes $TE_z(1, 1)$ dans un carré métallique (figure 5). Sauf mention contraire, on se bornera à un domaine DGTD dont l'aire sera égale à la moitié de l'aire du domaine complet. Dans un premier temps, on présente les résultats obtenus dans le cas où la zone de maillage DGTD est non raffinée par rapport à la zone FDTD, et pour un maillage en $\lambda/14$. La figure 2 a illustré le fait que la méthode DGTD est plus efficace qu'une méthode FDTD et a fortiori qu'une méthode FVTD pour résoudre le système de Maxwell sur ce type de précision de maillage. On s'attend par conséquent à une plus grande précision des résultats issus d'une méthode hybride DGTD/FDTD par rapport à une hybridation FVTD/FDTD. Or, les figures 7 et 8 illustrent que :

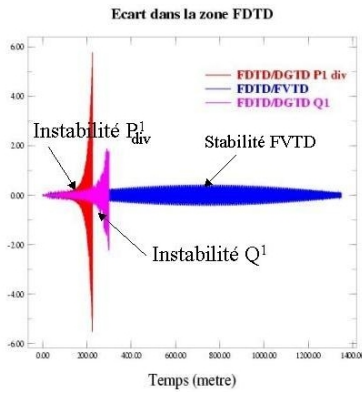


Fig. 7. Ecart à la solution explicite E_y dans la zone FDTD

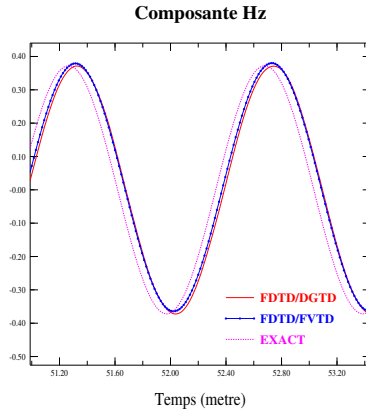


Fig. 8. FDTD/DGTD, FDTD/FVTD en $\lambda/14$

- en dépit de temps “clair” correspondant à un temps de simulation raisonnable (de l'ordre de 200 périodes et avec une instabilité plus rapide pour la méthode d'interpolation P_{div}^1 que pour la méthode Q^1), la méthode FDTD/DGTD est instable contrairement à la méthode FDTD/FVTD.
- pendant le temps “clair”, la méthode DGTD/FDTD n'est pas plus précise qu'une méthode FVTD/FDTD (voir figure 8).

L'avantage en précision numérique des méthodes DGTD par rapport aux méthodes FVTD disparaît au cours du temps, au travers des interpolations plus nombreuses dans la zone tampon entre les inconnues FDTD et DGTD. Le nombre d'interpolations nécessaires, mais aussi leurs natures (approximations de gradients directionnels par différences divisées dans le cas P_{div}^1), semblent être les paramètres déterminants dans la stabilité d'une méthode DGTD/FDTD. Les résultats de la figure 9 permettent également d'abonder dans ce sens :

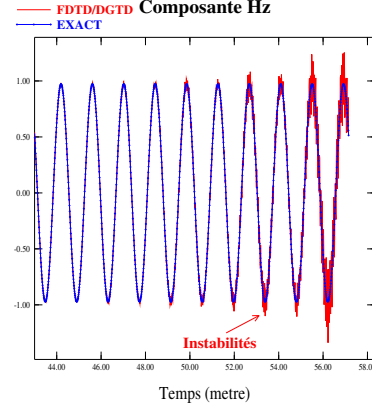
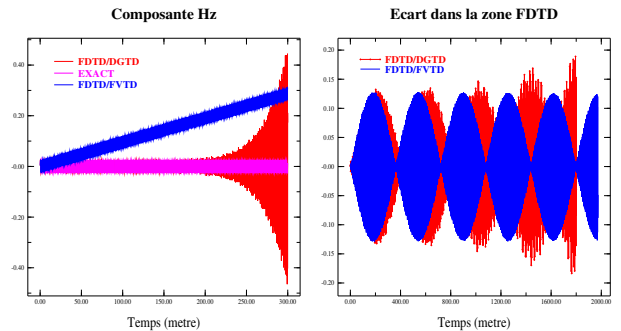


Fig. 9. Instabilité en $\lambda/70$ de la méthode FDTD/DGTD

Pour un maillage en $\lambda/70$ (pour lequel les méthodes FVTD ou DGTD se valent en terme de précision), le nombre d'interpolations nécessaires dans la zone tampon FDTD/DGTD est plus important et l'instabilité se déclenche plus tôt. Ce même phénomène a été constaté (et non représenté ici) lors de l'utilisation de la méthode hybride pour résoudre le système (1) sur une zone DGTD raffinée (jusqu'à des mailles 5 fois plus fines). Plus les interpolations dans la zone tampon sont sollicitées, plus l'instabilité se déclenche tôt. Pour un maillage en $\lambda/7$, l'erreur de dispersion de la méthode FVTD est trop importante, entraînant ainsi une divergence de la méthode hybride FDTD/FVTD (figure 10 de gauche). La méthode hybride FDTD/DGTD est quant à elle toujours instable, mais elle assure une bonne convergence avec la solution exacte pendant tout le temps clair (environ 200 périodes) précédant les instabilités :



(a) Divergence FDTD/FVTD et convergence FDTD/DGTD

(b) Ecart à la solution explicite E_y dans la zone FDTD

Fig. 10. Apport de la méthode FDTD/DGTD en $\lambda/7$

Sur la figure de 10 de droite où l'écart en la composante E_y dans la zone FDTD est représentée, on illustre que le temps "clair" de stabilité peut être amélioré (voire très nettement, avec ici un temps de simulation de l'ordre de 1000 périodes au lieu d'environ 400) en utilisant le fait que la condition CFL de la méthode DGTD est 3 fois plus restrictive que celle de la méthode FDTD. Pour cela, on a fixé une CFL pour la méthode DGTD et organisé des "rencontres" temporelles nécessaires aux interpolations dans la zone tampon que tous les 2 pas de temps. On diminue ainsi le nombre total d'interpolations sans réduire l'efficacité de la méthode, et le temps "clair" s'en trouve ainsi nettement amélioré.

A ce stade de l'étude, on peut légitimement se demander si les conditions métalliques ne sont pas pénalisantes pour l'algorithme d'hybridation, étant entendu que l'on empêche toute erreur numérique non consistante avec l'ordre d'approximation des schémas mis en jeu de s'évacuer du domaine de calcul. On se propose donc de simuler l'évolution de la solution de Maxwell en espace libre (via des couches PML de Bérenger), excitée par une source localisée dans la zone FDTD et de forme bi-exponentielle de Kouij en temps :

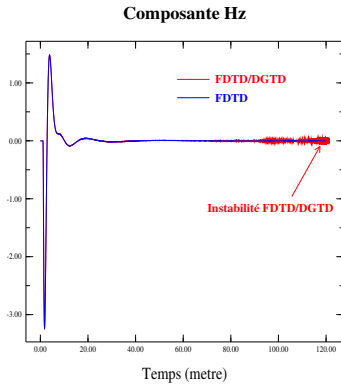


Fig. 11. Source impulsionnelle en espace libre

Sur la figure 11 où les solutions obtenues par une méthode FDTD et une méthode hybride FDTD/DGTD sont comparées, on constate une très bonne convergence de la solution hybride avec la solution FDTD jusqu'à l'apparition d'instabilités. On peut donc en conclure que ces instabilités ne sont que le fait d'interpolations trop nombreuses (ou pas assez précises) dans la zone tampon.

V. CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode hybride FDTD/DGTD de résolution des équations instationnaires de Maxwell sur un maillage cartésien. Etant donné que les méthodes DGTD sont une généralisation des méthodes FDTD, nous avons souhaité comparer en terme de précision cette nouvelle méthode hybride avec une méthode FDTD/FDTD stable. Nos conclusions sont les suivantes :

1. lorsque des tailles de maille rendent la méthode FDTD /FDTD divergente, notre méthode hybride est instable en temps long, mais suffisamment convergente pendant tout le temps "clair" de stabilité.

2. pour des configurations géométriques où la méthode FDTD/FDTD est raisonnablement précise et applicable, la méthode FDTD/DGTD de par son nombre plus important d'interpolations n'est pas plus précise.
3. nous n'avons pas pu (ou su) stabiliser en temps long la méthode hybride FDTD/DGTD, même si des artifices peuvent permettre de retarder cette instabilité.

Pour une hybridation FDTD/DGTD sur maillages destructurés/structurés, [8] parle explicitement mais qualitativement d'instabilités numériques. Or, pour ce type de configurations, seule une méthode DGTD avec inconnues barycentriques est exploitable pour une hybridation avec une méthode FDTD. Or, pour un maillage cartésien, nous avons montré que la méthode FDTD/DGTD P_{div}^1 est moins stable qu'une méthode à interpolations de type Q^1 . C'est pourquoi il nous a pas semblé opportun de traiter la méthode d'hybridation dans le cas maillage structuré/destructuré. En conclusion et par rapport à une méthode FDTD/FDTD, ce que l'on gagne d'un côté (meilleure précision pour des maillages grossiers), on le perd de l'autre (apparition d'instabilités en temps "suffisamment" long).

VI. RÉFÉRENCES

- [1] H. FAHS, *Numerical evaluation of a non-conforming discontinuous Galerkin method on triangular meshes for solving the time-domain Maxwell equations*, Research Report INRIA 6162, 02/2007.
- [2] N. CANOUE, *Méthodes de Galerkin discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [3] P. BONNET, *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique de volumes finis. Application à des problèmes de compatibilité électromagnétique*, Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont-Ferrand, 1998.
- [4] J. RAUCH, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Transactions of the American Mathematical Society, 291 :167-187, 1985.
- [5] S. PERNET, *Etude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris-Dauphine, 2004.
- [6] J.S. HESTHAVENS, T. WARBURTON, *High-order nodal methods on unstructured grids. Time-domain solution of Maxwell's equations*, J. Comput. Phys., 181 :1-34, 2002.
- [7] M. DURUFLE, *Schéma de Talezer, applications aux équations de Maxwell, comparaison à d'autres schémas*, Rapport Technique INRIA, 09/2006.
- [8] S.G. GARCIA, M. FERNANDEZ PANTOJA, A. RUBIO BRETONES, R. GOMEZ MARTIN, *Hybridizing DGTD and FDTD*, ICEAA, 17-21 :364-366, 2007.
- [9] G. DHATT, G. TOUZOT, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. Editeur, 1981.