Modèles asymptotiques et caractérisation électromagnétique d'une collection d'inclusions enfouie en espace libre ou stratifié

E. Iakovleva[1, 2], H. Ammari[2], D. Lesselier[1]

[1] Département de Recherche en Electromagnétisme - Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-Supélec-UPS), Supélec – Plateau de Moulon, 3, rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette cedex

[2] Centre de Mathématiques Appliquées (CNRS-Ecole Polytechnique), 91128 Palaiseau cedex

Des inclusions de petites tailles interagissent avec des champs électromagnétiques incidents. La mesure des perturbations en résultant doit permettre leur identification, au minimum leur localisation, mais aussi la quantification de paramètres électriques, voire la caractérisation d'encombrements et formes.

Une théorie mathématique a été développée pour préciser de telles inclusions à partir de mesures de frontière [Ammari et Kang, 2004]. Cet exposé, qui reprend certains éléments d'une thèse récente [Iakovleva, 2004] et de publications afférentes [Ammari *et al.*, 2003, 2004a, 2004b], porte sur l'identification d'inclusions homogènes (de nombre inconnu a priori) à partir de mesures d'amplitudes de diffraction lors de l'éclairement de ce milieu.

Des formules asymptotiques des champs électromagnétiques résultant du phénomène de diffraction sont présentées et exploitées pour la construction d'algorithmes d'identification non itératifs pour deux configurations types (milieu d'enfouissement homogène, ou constitué de deux demi-espaces séparés par une interface plane, les inclusions étant dans le demi-espace inférieur, sources et récepteurs dans le demi-espace supérieur). L'analyse numérique est ici restreinte à une géométrie 2-D (inclusions cylindriques, polarisation TE ou TM), mais l'analyse asymptotique est valide pour une configuration 3-D.

S'appuyant sur ces formules asymptotiques nous discutons deux algorithmes non itératifs pour la localisation des inclusions et la caractérisation de leurs géométries. (Dans la situation « stratifiée », nous faisons face à un problème d'aspect limité, sévèrement mal posé si l'ouverture d'illumination et/ou d'observation est de petite étendue.)

Le premier algorithme réduit la reconstruction des inclusions à un calcul de transformée de Fourier inverse. L'idée sous-jacente à cette méthode de Fourier est dans la continuation de [Calderon, 1980 ; Sylvester et Uhlmann, 1987]. La méthode possède des ressemblances à la tomographie par diffraction, basée sur une formule de perturbation aux petites amplitudes (approximation de Born) afin de réduire la reconstruction à une transformation de Fourier inverse.

Le second algorithme est du type MUSIC (MUltiple Signal Classification). En général, MUSIC s'utilise en traitement de signal afin d'estimer des fréquences individuelles d'harmoniques multiples d'un signal. Cet algorithme est basé sur la décomposition singulière de la matrice de données dite « Multi-Static Response ». Plus d'information sur cette méthode peut être trouvée dans [Cheney, 2001] ainsi que dans [Kirsch, 2002], avec des liens aux méthodes de retournement temporel [Prada *et al.*, 1995 ; Prada et Thomas, 2003 ; Micolau et Saillard, 2003]. L'explicitation des propriétés des valeurs et vecteurs singuliers de la matrice de données et l'application de MUSIC pour la localisation des inclusions seront considérées.

Notons que tous les matériaux impliqués sont linéaires, isotropes, passifs et au repos, et sont caractérisés par leurs permittivités et leurs perméabilités à la fréquence d'opération. L'équivalence entre l'électromagnétisme et l'acoustique linéaire dans une configuration 2-D, en remplaçant (en résumé) permittivité et perméabilité par compressibilité et densité volumique, et champ électrique scalaire par pression acoustique de fluides soumis à des ondes de compression, conduisent à beaucoup d'autres applications, le type des matériaux et de configurations géométriques à étudier et la gamme des valeurs des paramètres dans l'une ou l'autre discipline pouvant cependant différer considérablement en pratique.

Des résultats numériques variés sont présentés afin de mettre en évidence performances et limitations des algorithmes de reconstruction proposés.

Un niveau considérable d'expérimentation numérique est d'ailleurs nécessaire. Ceci est particulièrement vrai pour des inclusions magnétiques, ou simultanément diélectriques et magnétiques. Quant à l'impact du bruit et autres erreurs de mesure et de modèle, il reste pour l'essentiel à étudier en phase avec le monde réel. Finalement, le passage à des situations 3-D impliquant des inclusions multiples de forme générale (peut-être proches l'une de l'autre ou proches des interfaces du milieu les contenant) reste un challenge fort même si une partie significative de l'appareil théorique est déjà disponible.

Des améliorations peuvent aussi être envisagées. Notons particulièrement, pour MUSIC, l'usage d'une procédure dans laquelle la fonction coût est changée après chaque mise en évidence d'une inclusion [Mosher et Leahy, 1999], et en présence de données bruitées (une hypothèse naturelle), l'usage de plus de vecteurs singuliers que théoriquement nécessaires [Prada *et al.,* 1995].

Références

Ammari H, Iakovleva E, et Moskow S (2003) Recovery of small inhomogeneities from the scattering amplitude at a fixed frequency, *SIAM J. Math. Anal*. **34**, 882-900.

Ammari H, Iakovleva E, et Lesselier D (2004a) A MUSIC algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency, *SIAM J. Appl.Math.*, à paraître.

— (2004b) Two numerical methods for recovering small inclusions from the scattering amplitude at a fixed frequency, soumis.

Ammari H et Kang H (2004) *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements*, Lecture Notes in Mathematics, **1846**, Springer-Verlag, Berlin.

Calderon A P (1980) On an inverse boundary value problem, in Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 65-73.

Cheney M (2001) The linear sampling method and the MUSIC algorithm, *Inverse Probl*. **17**, 591-595.

Devaney A J (2004) Super-resolution processing of multi-static data using time reversal and MUSIC, *J. Acoust. Soc. Am*., à paraître.

Iakovleva E (2004) *Diffraction inverse par des petites inclusions*, Thèse Ecole Polytechnique, Palaiseau, 19 novembre.

Kirsch A (2002) The MUSIC algorithm and the factorisation method in inverse scattering theory for inhomogeneous media, *Inverse Probl*. **18**, 1025-1040.

Micolau G et Saillard M (2003), DORT method as applied to electromagnetic subsurface sensing, *Radio Science* **38** 1038-1049 doi:10.129/2000RS002590.

Mosher J C et Leahy R M (1999), Source localization using recursively applied and projected (RAP) MUSIC, *IEEE Trans. Signal Processing* **47**, 332-340.

Prada C et Thomas J-L (2003) Experimental subwavelength localization of scatterers by decomposition of the time reversal operator interpreted as a covariance matrix, *J. Acoust. Soc. Am*. **114**, 235-243.

Prada C, Thomas J-L, et Fink M (1995) The iterative time reversal process: analysis of the convergence, *J. Acoust. Soc. Am*. **97**, 62-71.

Sylvester J et Uhlmann G (1987) A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, *Ann. Math*. **125**, 153-169.