



**DIFFUSION
PAR
LES SURFACES
RUGUEUSES
ALÉATOIRES**

M. Sylvain
Université de Marne-la-Vallée

Journées scientifiques du CNFRS
Paris, les 24 et 25 février 2005

INTRODUCTION

1 - Généralités

Problème d'électromagnétisme bien posé

Équations de Maxwell (ou équivalentes)

Caractéristiques électriques du milieu (ϵ , μ , σ)

Conditions aux limites (entre milieux)

Conditions initiales (sources du champ)

En propagation

Recherche des modes propres

Solution analytique dans quelques cas rares (géométrie simple et milieux simples)

Milieu infini homogène

Deux milieux semi-infinis homogènes à interface plane

Obstacle unique homogène de forme simple (sphère, ellipsoïde, ...)

En l'absence de solution analytique rigoureuse

Approximation et/ou résolution numérique

↓
Limitée à un certain
domaine de fréquences↓
Limitée à un certain
volume spatial

En pratique

$\lambda/L \gg 1$	Approximation quasi-statique (ex. Diffusion de Rayleigh)
$\lambda/L \ll 1$	Approximations hautes-fréquences (optique géométrique, optique physique)
$\lambda/L \approx 1$	Cas le plus difficile (Domaine résonnant)

2 – Position du problème

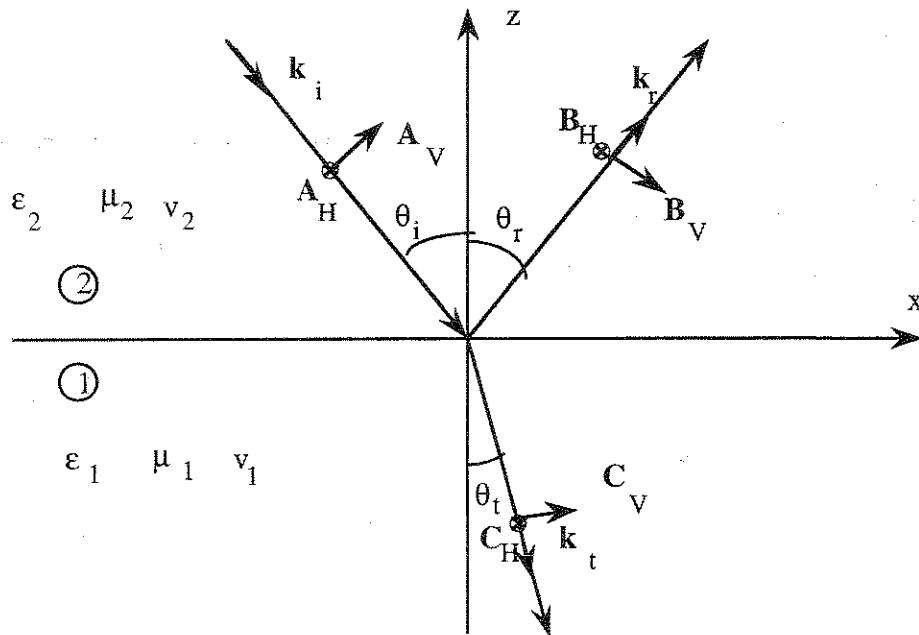
- Effet d'une interface rugueuse entre deux milieux homogènes et isotropes semi-infinis
- Interface plane. La surface est donnée par une équation $z = f(x,y)$ avec $\langle z \rangle = 0$.
- Grand nombre d'irrégularités
- Milieu incident : air ou vide
- Milieu 2 : quelconque (non magnétique) mais souvent considéré comme un conducteur parfait (hypothèse de moins en moins valide quand on monte en fréquence)
- Onde incidente plane et harmonique

3 – Domaines d'application

- Propagation au dessus des surfaces naturelles (sol ou mer)
- Propagation urbaine ou "indoor" (murs et parois)
- Télédétection

DESCRIPTION QUALITATIVE

1 - Problème de référence : réflexion et réfraction spéculaires à l'interface plane entre deux milieux homogènes semi-infinis



Solution électromagnétique

Directions des ondes réfléchi et transmise
(lois de Snell-Descartes)

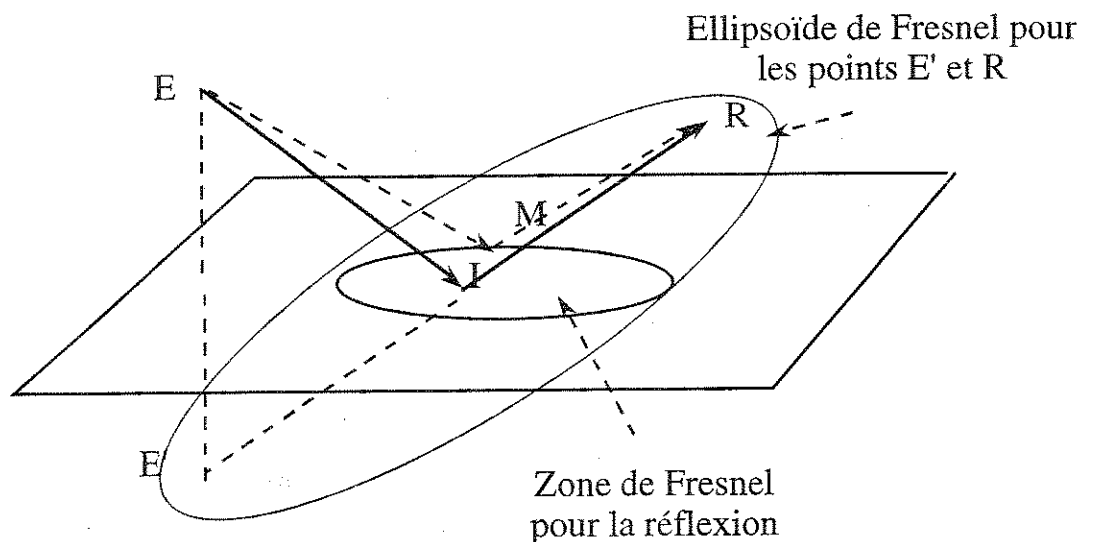
Amplitudes des ondes réfléchies et transmises
(formules de Fresnel pour les polarisations TE et TM)

Description de l'optique géométrique

- Représentation des ondes par des rayons
(extension possible à des surfaces régulières non planes)
- Conditions de validité de l'approximation optique
- Liens avec le problème électromagnétique
(Lois de Descartes, ondes localement planes, théorème de Malus et Dupin)

Description de l'optique physique

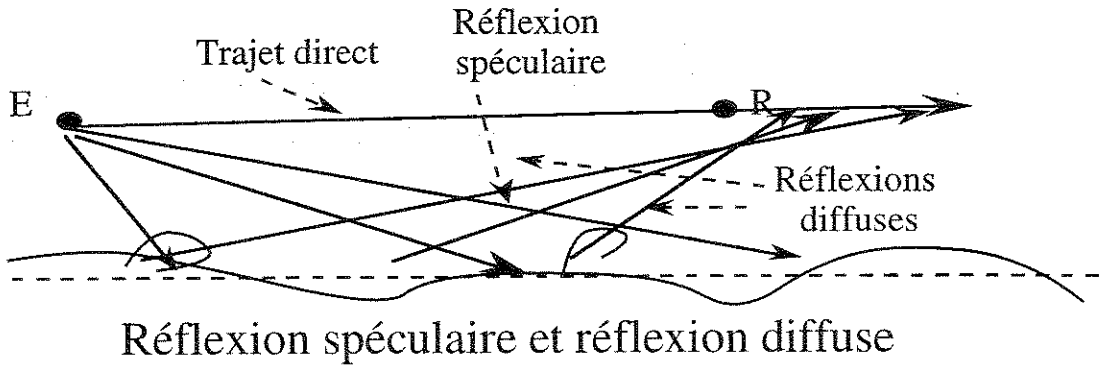
- Sources secondaires d'ondes sphériques (principe de Huygens-Fresnel)
- Décomposition des source secondaires en zones de Fresnel



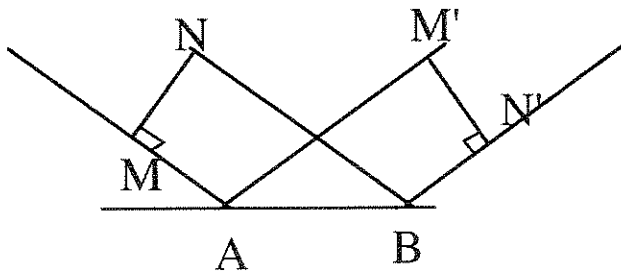
$$EM + MR = EI + IM + \lambda/2$$

2 – Réflexion diffuse

Observation en lumière visible. Conséquences

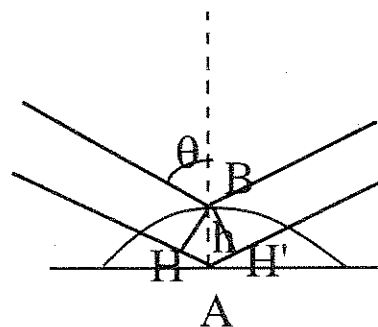


3 – Critère de Rayleigh



Surface polie

$$MA + AM' = NB + BN'$$



Surface rugueuse

$$\begin{aligned} \Delta L &= HA + HA' = 2 HA \\ &= 2h \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Delta \Phi = 2\pi \Delta L / \lambda = 4\pi h \cos \theta / \lambda$$

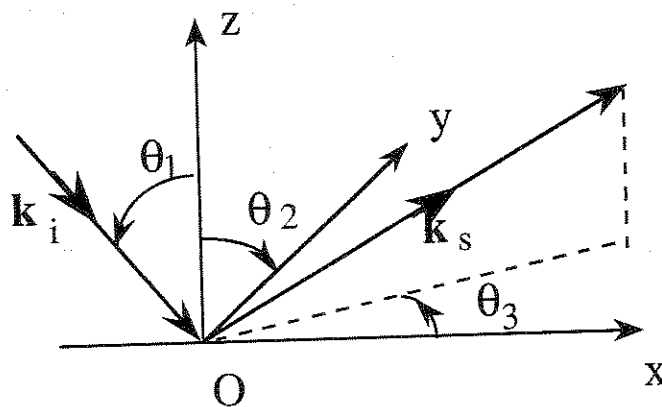
Critère de Rayleigh : Surface rugueuse si $\Delta \Phi > \pi/2$

ou

$$h \geq \frac{\lambda}{8 \cos \theta}$$

MÉTHODES DE RÉOLUTION

1 – Formulation générale du problème



Géométrie de la diffusion

A grande distance

$$\vec{E}_s = \exp(-i \vec{k}_s \cdot \vec{r}/r) \overline{M}(\vec{k}_i, \vec{k}_s) \vec{E}_i$$

2 – Description de la surface

Représentation déterministe : $z = f(x,y)$

Représentation aléatoire

Densité de probabilité $p(z)$

Fonction de corrélation $C(z, z')$ $z = f(x,y)$; $z' = f(x',y')$

3 – Méthodes analytiques de résolution

Très grand nombre de méthodes

Calculs rapidement complexes

Nous examinerons

Approximation de l'optique géométrique

Méthode de perturbations de Rice

Méthode de l'optique physique

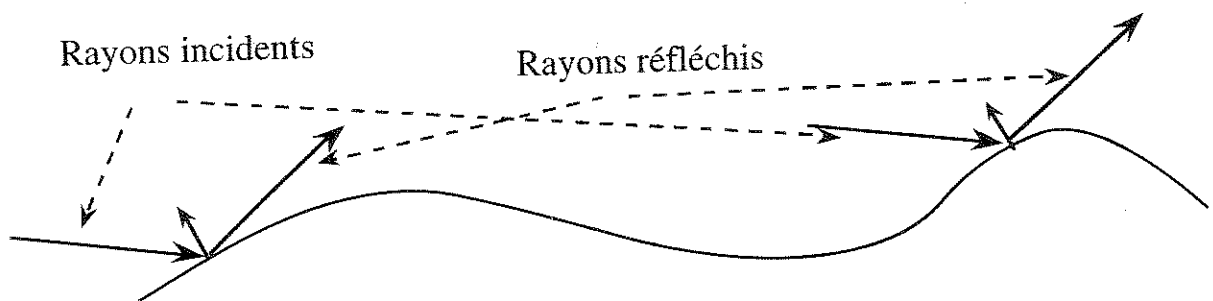
– Approximation scalaire

– Approximation vectorielle

Grand nombre d'autres méthodes

APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

1 – Méthode des "points brillants"



Décomposition de l'onde en rayons

Application en chaque point d'intersection des lois de la réfraction et de la réflexion, et des formules de Fresnel.

A grande distance, le champ dans une direction provient des points de la surface où le plan tangent a une direction donnée.

Avantages :

- calculs simples, en particulier la dépolarisation ;
- seule méthode facilement intégrable dans les simulations par tracé de rayons.

Inconvénient :

- résultats pas très bons (en particulier ne prévoit pas de rétrodiffusion)

2 – Modèles à facettes

Analogue à la méthode précédente, mais surface décomposée en petites facettes planes.

Avantage : permet de prendre en compte la taille finie des facettes (par un diagramme de rayonnement fourni comme un calcul de diffraction)

Inconvénients :

- calculs plus compliqués
- dans une représentation aléatoire il faut la distribution des facettes à la fois en orientation et en taille.

Si la rugosité est faible, on peut négliger les réflexions diffuses et se contenter de corriger le rayon réfléchi spéculaire pour tenir compte de la taille finie de la facette.

Méthode intéressante pour calculer le champ reçu en un point donné. Si on le veut partout, l'optique physique me semble mieux adaptée.

MÉTHODE DES PETITES PERTUBATIONS

Rayleigh (ondes acoustiques), 1895

Rice (ondes électromagnétiques et surface aléatoire), 1951

1 – Principe

On suppose une surface rugueuse carrée de côté L
se reproduisant périodiquement

On se donne la forme du champ

Champ total = champ incident + champ réfléchi sur plan
poli + somme d'ondes planes harmoniques donnant une
solution périodique de période L

Calcul distinct en polarisation TE et TM.

Calcul moins compliqué si le milieu 2 est un conducteur
parfait (pas de champ transmis ; calcul possible sur
le champ électrique seul)

On suppose la rugosité faible ($\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ et k_f sont
des infiniments petits du premier ordre). On développe
alors par rapport à ces infiniment petits et on satisfait
les équations du champ au deuxième ordre.

2 – Calcul pour le mode TE (et conducteur parfait)

Expression du champ électrique diffusé

$$E_x = \sum A_{mn} E(m,n,z)$$

$$E_y = 2i \sin(k \cos \theta z) \exp(-i k \sin \theta x) + \sum B_{mn} E(m,n,z)$$

$$E_z = \sum C_{mn} E(m,n,z)$$

$$E(m,n,z) = \exp[-i a (mx+ny) - i b(m,n) z]$$

$$\text{et} \quad a^2(m^2 + n^2) + b^2(m,n) = k^2$$

$$a = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Il existe des modes qui se propagent

$$a^2(m^2 + n^2) < k^2$$

$b(m,n)$ réel positif

et des modes évanescents

$$a^2(m^2 + n^2) > k^2$$

$b(m,n)$ imaginaire négatif

On résout en imposant que le champ \mathbf{E} soit normal en tout point de la surface

$$\vec{\mathbf{E}} - (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{N}}) \vec{\mathbf{N}} = 0$$

et vérifie en tout point l'équation

$$\text{div} \vec{\mathbf{E}} = 0$$

Le champ magnétique se déduit ensuite de \mathbf{E} par les équations en rotationnel.

Résultats

On développe les coefficients sous la forme

$$K_{mn} = K_{mn}^{(1)} + K_{mn}^{(2)} + O(f^3) \quad K = A, B \text{ ou } C$$

On arrive à obtenir tous les coefficients qui s'expriment en fonction des coefficients de Fourier $P(m,n)$ de la fonction périodique $f(x,y)$.

Au premier ordre $A_{mn}^{(1)} = 0$

$$B_{mn}^{(1)} = -2 ik \cos \theta P(m - k \sin \theta / a, n)$$

$$C_{mn}^{(1)} = -a_n B_{mn}^{(1)} / b(n, m)$$

Risque de divergence pour $b(m,n) = 0$

Formules compliquées pour les coefficients du second ordre

3 – "Randomisation de la surface"

Les coefficients de Fourier $P(m,n)$ sont maintenant considérés comme des variables aléatoires.

Rice les supposent gaussiens, de moyenne nulle et de variance $V(m,n)$ avec de plus

$$\langle P(m,n) \cdot P(u,v) \rangle = 0 \quad \text{si } (m,n) \neq (-u, -v)$$

$$\langle P(m,n) P(-m, -n) \rangle = \langle P(m,n) P^*(m,n) \rangle = V(m,n)$$

On peut alors calculer les moyennes du champ

On trouve le champ cohérent

$$\langle E_x \rangle = \langle E_z \rangle = 0$$

$$\langle E_y \rangle \neq 0 \text{ (expression compliquée)}$$

Puis la puissance du champ diffusé

$$\langle |E_x|^2 \rangle = 0$$

$$\langle |E_y - E_{y0}|^2 \rangle \text{ et } \langle |E_z|^2 \rangle$$



Champ pour
un plan poli

4 – Remarques

- 1) Une surface périodique n'est pas un modèle satisfaisant. On s'en affranchit en fin de calcul en faisant tendre L vers l'infini.
- 2) Le calcul en polarisation TM est identique, avec une expression plus complexe des champs incident et réfléchi (deux composantes) ou se fait à partir du champ magnétique.
- 3) Si le second milieu n'est pas un conducteur parfait, il faut exprimer aussi le champ transmis. On remplace alors l'équation de la divergence par la continuité de la composante tangentielle de \vec{H} (ou des dérivées du champ électrique).
- 4) L'incidence rasante doit être traitée à part et donne naissance à une onde de surface.

APPROXIMATION DE KIRCHHOFF OU DE L'OPTIQUE PHYSIQUE

1 – Principe

On part d'une représentation intégrale du champ obtenu par une intégrale de surface prise sur l'interface rugueuse (qui doit être infinie).

Comme on ne connaît pas le champ sur la surface, on le remplace par le champ qu'on aurait en chaque point par une réflexion spéculaire sur le plan tangent.

L'approximation n'est valable que si les rayons de courbure de la surface sont très grands par rapport à la longueur d'onde

2 – Approximation scalaire

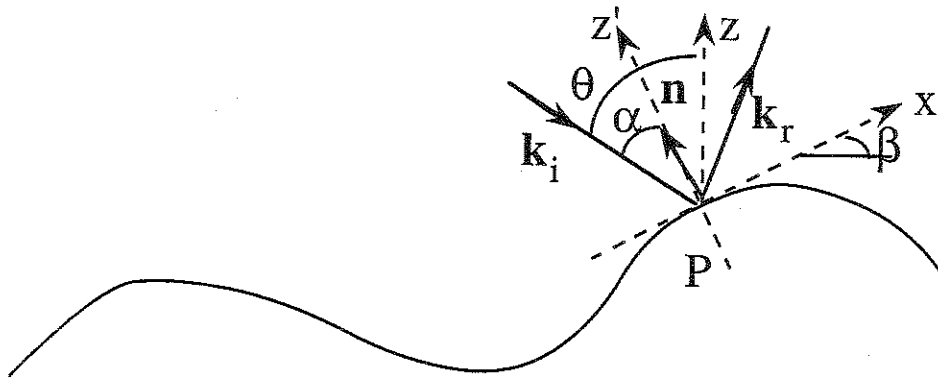
(Beckmann et Spizzichino, 1963)

Principe

On part de l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S [\vec{E}(\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \vec{E}(\mathbf{r}')}{\partial n}] d\mathbf{r}'$$

avec $\Psi(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}') = \exp[-ik_s R]/R$ et $R = |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|$



Géométrie de la réflexion

Le champ en tout point de la surface est donné par

$$\vec{E}(S) = (1 + R) \vec{E}_i$$

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{n}}\right)_S = i \vec{E}_i (R - 1) \vec{k}_i \cdot \vec{n}$$

Résultat

On calcule le coefficient de diffusion

$$\rho = \frac{\vec{E}(r)}{\vec{E}_{\text{spec}}(r)}$$

Champ diffusé

Champ spéculaire réfléchi par
le plan moyen

Le calcul se fait sans (trop) de problème pour une surface rugueuse suivant une seule dimension (Ox) et le plan d'incidence Ox Oz car alors les polarisations TE et TM se conservent.

Dans le cas d'une surface rugueuse à deux dimensions, la polarisation locale n'est pas la même que par rapport au plan moyen, rendant le calcul inextricable. On s'en sort (sans avoir la transpolarisation) si le coefficient de réflexion ne dépend pas du point de la surface :

- soit on prend un coefficient "moyen" sur l'ensemble de la surface rugueuse
- soit on se limite à un conducteur parfait, ce qui implique un coefficient de réflexion égal à 1.

Dans ce dernier cas, on trouve après un certain nombre de calculs (pour une surface rugueuse rectangulaire $-X < x < X$, $-Y < y < Y$)

$$\rho(\theta_1; \theta_2, \theta_3) = F(\theta_1; \theta_2, \theta_3) \frac{1}{A} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y e^{i \vec{v} \cdot \vec{r}} dx dy$$

$$+ \frac{e(X,Y)}{A} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Terme d'effet de bord} \\ \text{négligeable si } X \text{ et } Y \\ \text{très grand devant } \lambda \end{array}$$

avec

$$F(\theta_1; \theta_2, \theta_3) = \frac{[1 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3]}{[\cos\theta_1 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)]}$$

$$A = 4 XY \quad (\text{aire de la surface rugueuse})$$

$$\vec{v} = \vec{k}_i - \vec{k}_s$$

"Randomisation" de la surface

Le terme $e^{-v_z z}$ devient aléatoire

On est conduit à calculer

$\langle \rho \rho^* \rangle$ (proportionnel à la puissance diffusée moyenne)

$V(\rho)$ (indicatif des fluctuations du champ diffusé)

On a $V(\rho) = \langle \rho \rho^* \rangle - \langle \rho \rangle \langle \rho^* \rangle$

Le calcul donne

$$\langle \rho \rho^* \rangle = \frac{2\pi F^2}{A} \int_0^\infty J_0(v_{xy} l) \Phi(v_z) \Phi^*(v_z) l dl$$

$$V(\rho) = \frac{2\pi F^2}{A} \int_0^\infty J_0(v_{xy} l) [\Phi_2(-v_z, v_z) - \Phi(v_z) \Phi^*(v_z)] l dl$$

avec
$$v_{xy} = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$$

Φ et Φ_2 sont les fonctions caractéristiques des lois de probabilité $p(z)$ et $p(z, z')$

Surface gaussienne

Pour progresser, il faut préciser le modèle statistique de surface

Le plus utilisé est le modèle gaussien

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2\sigma^2} \quad C(\tau) = e^{-\tau^2/L^2}$$

σ : écart-type des irrégularités

L : longueur de corrélation

On en déduit

$$p(z,z') = \frac{1}{2\pi\sigma^2(1-C^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{z^2 - 2Czz' + z'^2}{2\sigma^2(1-C^2)}\right]$$

$$\Phi(v) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2v^2\right)$$

$$\Phi(v,v') = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(v^2 + 2Cvv' + v'^2)\right]$$

Le calcul peut alors être mené à son terme ; le résultat dépend du paramètre

$$g = \sigma^2 v_z^2 = [2\pi (\sigma/\lambda) (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)]^2$$

Dans la direction spéculaire $g = [4\pi (\sigma/\lambda) \cos \theta_1]^2$

On retrouve l'expression du déphasage de Rayleigh

On trouve

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 \exp(-g/2)$$

avec $\rho_0 = F \operatorname{sinc}(v_x X) \operatorname{sinc}(v_y Y)$

Dans la région de réflexion spéculaire $\rho_0 = 1$ et

$$\langle \rho_{\text{spec}} \rangle = \exp(-g/2)$$

$$V(\rho) = \frac{\pi L^2 F^2 e^{-g}}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n n!} \exp\left(-\frac{v_{xy}^2 L^2}{4n}\right)$$

$$\langle \rho \rho^* \rangle = V(\rho) + \langle \rho \rangle \langle \rho \rangle^* = V(\rho) + \rho_0^2 e^{-g}$$

$g \ll 1$ (surface peu rugueuse) on peut prendre un seul terme du développement

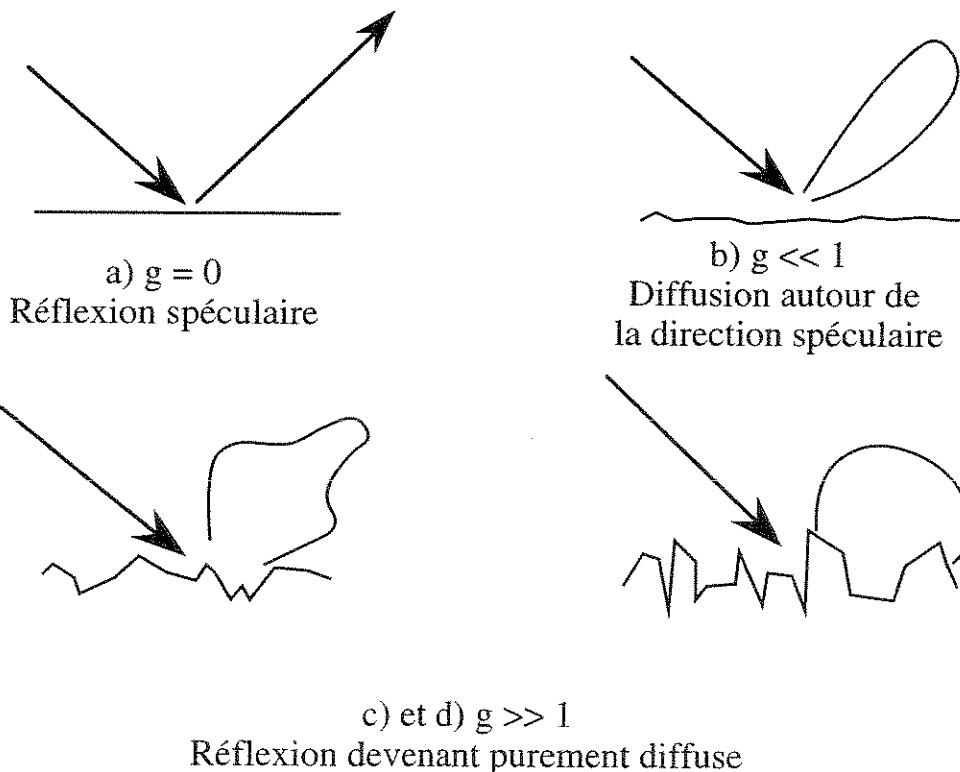
$$\langle \rho \rho^* \rangle = e^{-g} \left[\rho_0^2 + \frac{\pi L^2 F^2 g}{A} \exp\left(-\frac{v_{xy}^2 L^2}{4}\right) \right]$$

$g \approx 1$ (surface modérément rugueuse) On doit prendre plusieurs termes du développement.

$g \gg 1$ (surface très rugueuse) Le développement converge trop lentement. On utilise une méthode de phase stationnaire

$$V(\rho) \approx \langle \rho \rho^* \rangle = \frac{\pi F^2 L^2}{A g} \exp\left(-\frac{v_{xy}^2 L^2}{4g}\right)$$

Ces formules montrent bien comment la diffusion évolue quand la rugosité augmente



3 – Approximation vectorielle

(Beckmann, 1968 ; Ulaby, Moore et Fung, 1982 ; Ogilvy, 1991)

Le principe est le même. On remplace en général l'intégrale de Helmholtz par la formule vectorielle de Stratton-Chu

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = -\frac{i e^{-i k_s R}}{4 \pi k R} \vec{k}_s \wedge \iint_S [\vec{n} \wedge \vec{E}(\mathbf{r}') - \sqrt{\mu/\epsilon} \frac{\vec{k}}{k} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}(\mathbf{r}'))] e^{i \vec{k}_s \cdot \vec{r}'} d\mathbf{r}'$$

Il faut connaître les champs tangentiels, électrique et magnétique, sur la surface S.

On les calcule, comme dans l'approximation scalaire, par l'approximation du plan tangent.

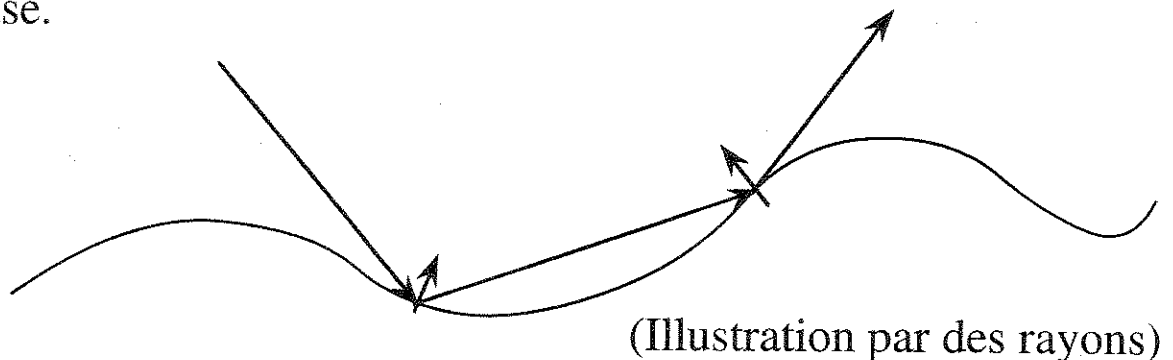
L'expression obtenue contient cette fois l'information de polarisation, le milieu 2 n'a pas besoin d'être un conducteur parfait, et on peut calculer le champ transmis aussi bien que le champ réfléchi (μ et ϵ dans l'intégrale se rapportent au milieu de diffusion).

On ne sait toutefois pas intégrer analytiquement l'expression obtenue. On utilise souvent une méthode de phase stationnaire.

COMPLÉMENTS DIVERS

Un certain nombre de complications ne sont pas prises en compte par les méthodes précédentes et demandent un examen particulier. On peut citer :

- Les interactions multiples de l'onde incidente avec la surface rugueuse.



- L'ombre portée par la surface (d'autant plus importante que l'incidence devient rasante)



- Le fait que la surface rugueuse peut ne pas être plane (cas de la Terre sur une liaison longue)

- L'existence de surfaces à plusieurs échelles de rugosité (méthode à deux échelles développée initialement pour la diffusion par la surface de la mer ; considération de surfaces fractales).

- La prise en compte des diagrammes d'antenne.

BIBLIOGRAPHIE

(Sommaire)

P. Beckmann, The depolarization of electromagnetic waves (chapitre 5), The Golem Press (1968)

P. Beckmann et A. Spizzichino, The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces, Pergamon Press (1963)

J. A. Ogilvy, Theory of wave scattering from random rough surfaces, Institute of Physics Publ. Ltd (1991)

S. O. Rice, Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces, Com. Pure Appl. Math., 4, pp.351-378, 1951

F. T. Ulaby, R. K. Moore et A. K. Fung, Microwave remote sensing, Tome 2, Chapitres 11 et 12, Addison Wesley Publ. Comp. (1982)