Analyse en ondelettes pour l'exploration à distance de structures fractales

H. Aubert* et D.L. Jaggard**

** INPT-ENSEEIHT, 2, rue Charles Camichel, 31071 Toulouse, aubert@len7.enseeiht.fr*
*** Université de Pennsylvanie, Philadelphie, USA, jaggard@seas.upenn.edu*

Résumé
Nous proposons d'explorer à distance les propriétés d'échelles des structures fractales (naturelles ou manufacturées) par l'analyse en ondelettes de leur réponse à une impulsion électromagnétique. Nous montrons que les ondelettes permettent de localiser dans la réponse impulsionnelle les discontinuités (ou singularités) pertinentes pour l'extraction des descripteurs de la structure interrogée.

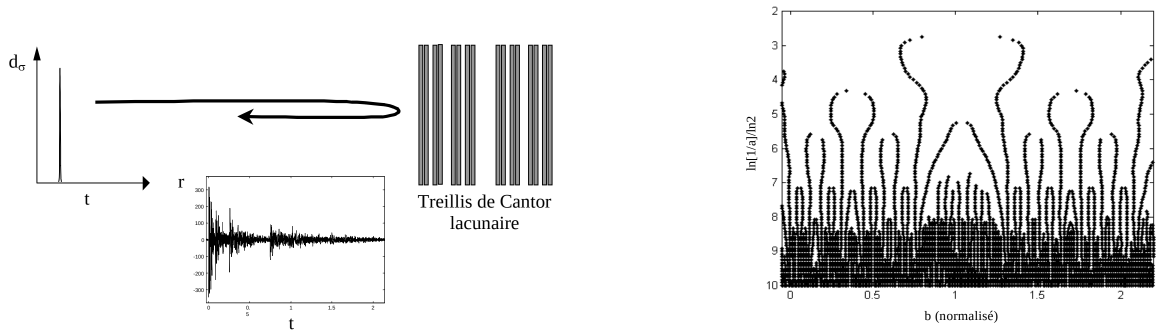
Mots clés : fractales, ondelettes, électromagnétisme

Introduction

Les fractales permettent une représentation réaliste de nombreuses scènes et structures naturelles. En particulier elles décrivent fidèlement l'irrégularité d'un sol, la surface d'un océan ou encore l'arborescence des réseaux fluviaux naturels. L'exploration à distance des propriétés d'échelles des structures fractales peut s'effectuer à partir de l'analyse de leur réponse à une impulsion électromagnétique. Dans ce contexte l'analyse en ondelettes de réponses impulsionnelles semble prometteuse : elle s'avère particulièrement performante dans l'analyse d'objets fractals à autosimilarité discrète, telles que les structures stratifiées (treillis) [1]-[4]. Nous reportons ici des résultats récents sur l'analyse en ondelettes de la réponse impulsionnelle de structures fractales et sur l'extraction à distance des descripteurs (dimension fractale, lacunarité) de ces structures.

Analyse en ondelettes de la réponse impulsionnelle de structures fractales

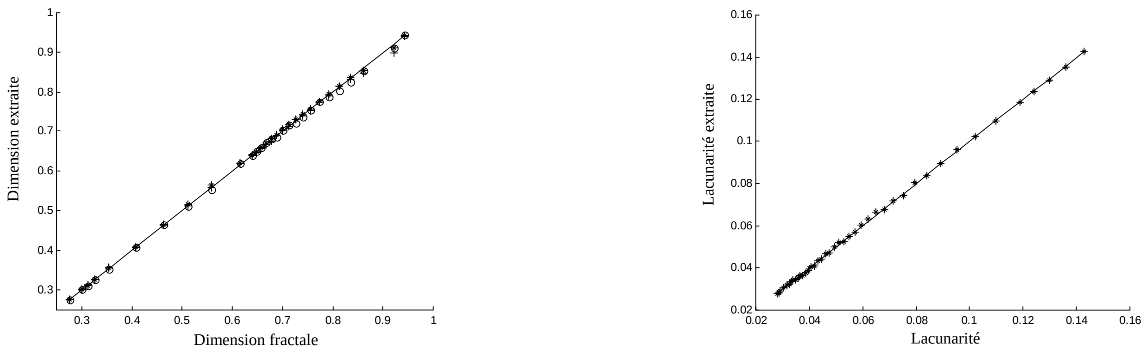
Soit une impulsion gaussienne électromagnétique $d_\sigma(t)$ donnée par : $d_\sigma(t) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t}{2\sigma}\right)^2}$, où σ désigne le rayon de l'impulsion. Sa composante spectrale $\hat{d}_\sigma(\omega)$ à la pulsation ω est déduite de la transformation de Fourier suivante : $\hat{d}_\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_\sigma(t)\, e^{j\omega t} dt = e^{-(\sigma\omega)^2}$. La réponse impulsionnelle $r(t)$ d'une structure fractale est alors donnée par la transformation de Fourier inverse : $r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega)\, e^{-(\sigma\omega)^2} e^{-j\omega t} d\omega$, où $R(\omega)$ désigne le coefficient de réflexion à la pulsation ω de la structure fractale. Du fait des réflexions multiples mises en jeu dans une structure fractale, la variation temporelle de la réponse impulsionnelle $r(t)$ est très irrégulière : pour des impulsions suffisamment étroites, le signal se présente comme une succession dans le temps de changements brusques de l'amplitude. Dans le cas d'un treillis de Cantor, cette allure erratique est illustrée sur la figure 1(a). Les changements brusques du signal au cours du temps sont appelés *singularités*. L'analyse en ondelettes nous permet de localiser dans ce signal les singularités pertinentes pour l'extraction des descripteurs de la structure fractale.



(a) (b)

Figure 1: (a) Réponse impulsionnelle *r(t)* d'un treillis de Cantor ; (b) Squelette de sa transformation en ondelettes

La transformation (continue) en ondelettes de la réponse impulsionnelle *r(t)* est définie par : $W_\Psi[r](a,b)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\,\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$, où la fonction réelle *Ψ(t)* désigne l'ondelette mère (nous adoptons ici comme ondelette mère la dérivée seconde d'une gaussienne), *a* et *b* représentent respectivement l'échelle et le temps. La figure 1(b) donne une représentation dans le domaine temps-échelle de l'ensemble des maxima du module de $W_\Psi[r](a,b)$: cet ensemble est appelé *squelette* de la transformation en ondelettes. A une échelle donnée, chaque point dans cette représentation désigne la position d'un maximum pour le module. Une structure hiérarchique est clairement présente dans ce squelette et révèle l'existence dans la réponse impulsionnelle de singularités réparties sur un ensemble de Cantor. Comme illustré sur la figure 2, cette structure hiérarchique permet d'extraire avec précision la dimension fractale et la lacunarité de la structure fractale interrogée par l'impulsion.



(a) (b)

Figure 2 : (a) Dimension extraite du squelette de la fig. 1(b) en fonction de la dimension fractale du treillis et (b) lacunarité extraite du squelette de la fig. 1(b) en fonction de la lacunarité du treillis fractal.

Conclusion

Nous avons montré que l'analyse en ondelettes était un outil efficace pour localiser, dans la réponse impulsionnelle de structures fractales, les singularités pertinentes pour la détermination à distance des descripteurs tels que la dimension fractale et la lacunarité.

Les auteurs remercient A.-S Saleh, Y. Laksari et J.-Y. Tourneret pour leurs contributions.

Références bibliographiques

[1] Y. LAKSARI, H. AUBERT, D.L.JAGGARD, J.Y. TOURNERET, "Lacunarity of Fractal Superlattices: a Remote Estimation using Wavelets," accepted for publication in *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, April 2005.

[2] H.AUBERT, D.L.JAGGARD, "Wavelet Analysis of transients in Fractal Superlattices," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-50, No. 3 , pp. 338-345, March 2002.

[3] Y. LAKSARI, H. AUBERT, D.L.JAGGARD, "The Wavelet-based Partition Function for the Remote Analysis of Discrete Self-similar Objects," *Electronics Letters*, vol.38, No. 14, pp.741-742, July 2002.

[4] A.-S. SALEH, H. AUBERT, D.L. JAGGARD, "Lacunarity of Multi-gap Fractal Superlattices Using Wavelet Analysis," *Optics Communications*, vol. 197/4-6, pp. 255-260, October 2001.